Universidad Zaragoza
1542

Trabajo Fin de Máster

Propuesta didáctica para Funciones en Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas de 3º de E.S.O.

A didactic proposal for functions in Mathematics oriented to the Academic Teachings in 3rd of E.S.O.

Autora

Victoria Gracia Gracia

Directora

Alejandra S. Córdova Martínez

FACULTAD DE EDUCACIÓN
2020

Índice

A. Sobre la definición del objeto matemático a enseñar

1. Nombra el objeto matemático a enseñar e indica el curso y asignatura en la que sitúas el objeto matemático

Esta memoria se corresponde con el Trabajo Fin de Máster que recoge una propuesta didáctica para enseñar el **objeto matemático** de funciones, así como la modelización en situaciones de la vida real. Específicamente se trata de enseñar el concepto de función, las formas de representación, y el estudio de las características de una función.

El **curso** académico seleccionado para estudiar este objeto matemático es 3º de ESO, en la asignatura de **Matemáticas orientadas a las enseñanzas Académicas**.

Cabe destacar que las funciones en las matemáticas académicas de este curso se encuentran en el Bloque 4 ("Funciones") del currículo y los contenidos que se han de estudiar, según la orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón, son los siguientes:

- Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias.
- Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica correspondiente.
- Análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados.
- Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica.
- Expresiones de la ecuación de la recta.
- Funciones cuadráticas. Representación gráfica. Utilización para representar situaciones de la vida cotidiana.

Cabe destacar que este bloque se divide en dos secciones, la primera estudia las características y propiedades de las funciones (primeros cuatro puntos), y la segunda estudia a fondo las funciones lineales y cuadráticas (dos últimos puntos). Por tanto, a lo largo de esta memoria se estudia la primera parte, es decir, cómo se introducen en la teoría y práctica las funciones y sus propiedades.

2. **¿Qué campo de problemas, técnicas y tecnologías asociadas al objeto matemático pretendes enseñar?**

Teniendo en cuenta los contenidos recogidos en la sección anterior, los campos de problemas con los que se trabaja durante esta memoria son: el concepto de función, las formas de representar una función, y el estudio de las características de una función.

En cuanto a las técnicas que se enseñan, estas se corresponden con las técnicas extraídas al analizar distintos libros de texto las cuales se verán en la Sección B.2. Por consiguiente, se trabajarán técnicas asociadas a identificar el concepto de función, las formas de representar una función y los cambios entre estas formas de representación, como muestran Sierra Vázquez, González Astudillo y López Esteban (1998).

	Descripción verbal	Tablas	Gráficas	Expresiones algebraicas
Descripción verbal		Medida	Croquis	Modelo
Tablas	Lectura de relaciones numéricas		Dibujo	Ajuste numérico
Gráficas	Lectura de relaciones gráficas	Tabulación		Ajuste gráfico
Expresiones algebraicas	Lectura de relaciones simbólicas	Tabulación	Croquis	

Tabla 1. Relaciones entre las formas de representación de las funciones.

Finalmente, tras el análisis de los libros de texto, se extraen técnicas con las que analizar las características y propiedades de las funciones.

Por lo tanto, para trabajar estas técnicas, las tecnologías mediante las cuales se lleva a cabo dicho estudio hacen referencia a las distintas definiciones que se estudian en la unidad de funciones y en la representación gráfica de estas.

B. Sobre el estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático

1. **¿Cómo se justifica habitualmente la introducción escolar del objeto matemático?**

En el día a día se pueden encontrar fenómenos en los que existen relaciones entre dos magnitudes, por ello es muy importante que el alumnado conozca el concepto de función. Aunque, generalmente, los libros de texto no contienen una justificación concreta en cuanto a la introducción del objeto matemático de función.

Para observar dicha justificación se han seleccionado dos libros de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, de las editoriales Anaya y Santillana del año 2015, y un libro en formato digital del CIDEAD (Centro para la Innovación y

Desarrollo de la Educación a Distancia). A continuación se analiza cómo previamente tratan de introducir la unidad y el objeto matemático de función.

Comenzaré con el libro de Colera Jiménez, J., Gaztelu Albero, I., Oliveira González, M.J. y Colera Cañas, R. (2015). *ESO 3 Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas*. Madrid: Anaya.

En este libro se realiza una breve introducción histórica sobre la aparición de las funciones y cómo estas han evolucionado en el tiempo "Sin duda, el origen de las funciones se debe a la necesidad de dar explicación a los fenómenos físicos. En la antigüedad, la explicación de estos era fruto de la observación y la especulación" (Colera Jiménez, J., Gaztelu Albero, I., Oliveira González, M.J. y Colera Cañas, R., 2015, pág. 144). También comenta cómo se llegó a la medición y la cuantificación, así como a la aparición de las funciones, donde destacan personajes como Galileo y Euler, entre otros.

Posteriormente, da comienzo a la unidad mediante una gráfica que representa la relación entre tiempo y altura de un helicóptero y repasa mediante ella diferentes conceptos (variables, ejes y la escala en que se realizan, dominio y recorrido). Una vez repasados dichos conceptos, se muestra la siguiente definición:

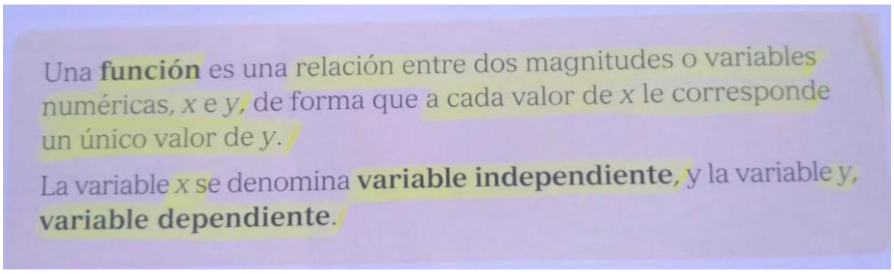
> Una **función** es una relación entre dos variables a las que, en general, llamaremos x e y.
>
> - x es la **variable independiente** (en el ejemplo del helicóptero, el tiempo).
> - y es la **variable dependiente** (en el ejemplo del helicóptero, la altura).
> - La función asocia a cada valor de x un único valor de y. Se dice que y **es función** de x.

Finalmente, se comentan algunos fenómenos que relacionan las funciones con las matemáticas: distancia recorrida por un móvil en el tiempo, temperatura del aire al variar la altura,…

El siguiente libro estudiado, en este caso de la editorial Santillana, es:

De la Prida Almansa, C., Gaztelu Villoria, A.M., González García, A., Machín Polaina, P., Pérez Saavedra, C. y Sánchez Figueroa, D. (2015). *Matemáticas Enseñanzas académicas 3º ESO. Serie resuelve.* Madrid: Santillana.

En este libro se proporcionan claves para comenzar la unidad, se recuerda el concepto de sistema de coordenadas, abscisa y ordenada, y nombra los contenidos que se aprenderán a lo largo de dicha unidad. Además, en la introducción se incluye una breve presentación teórica de la aviación y se muestra una gráfica en relación a la altura y distancia de uno de los primeros vuelos del siglo XVIII. Sin embargo, en este libro a diferencia del anterior, no se realiza una introducción histórica del concepto de función. Después, comienza la unidad con la siguiente definición:



Una **función** es una relación entre dos magnitudes o variables numéricas, x e y, de forma que a cada valor de x le corresponde un único valor de y.

La variable x se denomina **variable independiente**, y la variable y, **variable dependiente**.

Tras introducir la definición, se presentan dos ejemplos resueltos. En ambos se clasifican las magnitudes como variables independiente y dependiente, y se trata de establecer una relación entre ambas. El primer ejemplo, se trata de una relación entre el número de cuadernos que se compran (x) y el precio de dichos cuadernos (y), donde al número de cuadernos que se compran le corresponde un único valor del precio, por tanto, se tiene que la relación es una función. Sin embargo, en el segundo ejemplo se habla de la relación entre el peso y la altura de las personas, de donde se observa que a un valor del peso le pueden corresponder varios valores de altura. Luego, la relación no es función.

Posteriormente, se ha estudiado otro libro, en este caso de formato digital:

Aína Martínez, J.M., Alonso Borrego, J.L., Cabezón Ochoa, M.A., Fernández Rubio, J.I., García Cebrían, M.J., Herrero Izquierdo, J. y Ruíz Gil, C. (2009). *Matemáticas 3º ESO.* CIDEAD. Recuperado de http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/3esomatematicas/index.htm

En este se introduce la unidad con un ejemplo resuelto en el que se analiza cómo dos satélites artificiales giran alrededor de la Tierra. En dicho ejemplo se observan tres gráficas distintas que dependen del ángulo que forman los planos de las órbitas de los dos satélites a lo largo de un día. Como en el caso anterior, tampoco se realiza una introducción histórica al concepto de función. Seguidamente, se introduce la definición de función del siguiente modo:

> Una función es una relación de causa-efecto entre dos cantidades matemáticas: a iguales causas, iguales efectos.
>
> La causa se denomina **variable independiente** y se denota con la letra ***x***. El efecto es la **variable dependiente**, que se indica con la letra ***y***.
>
> Frecuentemente, en lugar de la letra ***y*** se utiliza la expresión ***f(x)*** (o ***g(x)***, ...) para dar a entender que ***y*** efectivamente **depende** del valor de ***x***.

Después, se muestra un breve ejemplo en el que se observa el área de un polígono regular como función de la medida del lado, donde la variable independiente es la longitud del lado, y la variable dependiente el área del polígono.

2. ¿Qué campos de problemas, técnicas y tecnologías se enseñan habitualmente?

Teniendo en cuenta los contenidos que se estudian en Matemáticas orientadas a las enseñanzas Académicas de 3º ESO, para analizar los campos de problemas, técnicas y tecnologías con las que se enseñan habitualmente las funciones en este curso se han analizado los tres libros comentados anteriormente.

Campos de Problemas	**Anaya**	**Santillana**	**CIDEAD**
1. CP1. Concepto de función			
Función representada por un enunciado.	X	X	X
Función representada por una gráfica.	X	X	X
Función representada por una tabla de valores.		X	
2. CP2. Relaciones entre sistemas de representación			
Paso de enunciado a expresión algebraica.	X	X	
Paso de enunciado a una gráfica.	X	X	
Paso de enunciado a una tabla de valores.	X	X	X
Paso del enunciado a expresión algebraica, tabla y gráfica.	X	X	X
Paso de tabla de valores a gráfica.	X	X	X
Paso de tabla de valores a enunciado.*			
Paso de tabla de valores a expresión algebraica.*			
Paso de una gráfica a enunciado.	X	X	
Paso de gráfica a tabla de valores.		X	
Paso de gráfica a expresión algebraica.	X	X	

Paso de expresión algebraica a gráfica	X	X	X
Paso de expresión algebraica a enunciado.		X	
Paso de expresión algebraica a tabla de valores.	X	X	X
3. CP3. Características de las funciones.			
Dominio y recorrido de una función dada por su enunciado.		X	
Dominio y recorrido de una función dada por su gráfica.	X	X	X
Dominio de una función dada por su expresión algebraica.		X	X
Continuidad de una función dada por su gráfica.	X	X	X
Cálculo de la imagen de un punto en la expresión algebraica.		X	
Cálculo de la imagen y antiimagen dada por su gráfica.			X
Puntos de corte de una función con los ejes dada su forma algebraica.		X	X
Puntos de corte de una función con los ejes dada gráficamente.		X	
Crecimiento y decrecimiento de una función dada gráficamente.	X	X	X
Máximos y mínimos de una función dada gráficamente.	X	X	X
Periodicidad de una función dada su gráfica.	X	X	X
Simetría de una función dada algebraica y gráficamente.		X	
Tendencia de una función dada gráficamente.	X		

Cabe destacar que los dos casos marcados con * no aparecen en los libros analizados pero se incluyen en el trabajo ya que se estudian como casos complementarios. Además de que forman parte de la Sección A.2.

Los campos de problemas señalados en esta tabla muestran como el libro de Santillana recopila un número de problemas más completo que los de Anaya y CIDEAD. Además, a pesar de que en la introducción de la unidad vaya directamente a la definición de función, este libro proporciona las explicaciones de las características de las funciones de una forma más amplia y detallada que los otros dos libros. Destacar que en ambos libros se pueden observar ejercicios o pequeños ejemplos resueltos que ayudan al alumnado a entender mejor los conceptos y características de las funciones.

A continuación, se van a detallar las técnicas y tecnologías usadas para los tipos de campos de problemas anteriores, tanto las que aparecen en los libros, como alguna más que se indica y se trabaja durante la presente memoria.

1. **<u>CP1. Concepto de función.</u>**

- CP1.1. Función representada por un enunciado y por su tabla de valores.

- T1.1. Técnica: se establece una relación entre la variable dependiente (y) y la variable independiente (x), donde se estudia si a cada valor de x le corresponde un único valor de y.
- Tecnología: definición de función.

- CP1.2.Función representada por una gráfica.
  - T1.2. Técnica: los puntos del plano en un sistema de coordenadas cartesiano se representan mediante los pares (x, y), de modo que para cada valor de x se tiene un único valor de y.
  - Tecnologías: definición de función y gráfica.

2. **<u>CP2. Relaciones entre sistemas de representación.</u>**

- CP2.1. Paso de enunciado a expresión algebraica.
  - T2.1. Técnica: identificar las variables dependiente e independiente del enunciado y pasarlas a su forma algebraica estableciendo la relación entre ambas.
  - Tecnología: definición.
- CP2.2. Paso de enunciado a una gráfica.
  - T2.2. Técnica: plasmar los datos del enunciado en un eje de coordenadas.
  - Tecnología: definición y gráfica.
- CP2.3. Paso de enunciado a una tabla de valores.
  - T2.3. Técnica: seleccionar las variables dependiente e independiente del enunciado y realizar una tabla de valores.
  - Tecnología: definición.
- CP2.4. Paso de enunciado a expresión algebraica, tabla y gráfica.
  - T2.4. Técnica: identificación de variables dependiente e independiente, establecer un modelo, realizar una tabla de valores y representación en un sistema de coordenadas.
  - Tecnología: representación.
- CP2.5. Paso de tabla de valores a gráfica.
  - T2.5. Técnica: tomar los pares (x, y) de la tabla y sustituirlos correctamente en un sistema de coordenadas.
  - Tecnología: gráfica y definición.
- CP2.6. Paso de tabla de valores a enunciado. Destaca que no aparece en los libros analizados.

- T2.6. Técnica: analizar los valores de la tabla como pares (x, y) y asociar un enunciado que se ajuste a dichos valores, es decir, hacer una lectura de las relaciones numéricas.
- Tecnología: definición.

- CP2.7. Paso de tabla de valores a expresión algebraica. Destacar que este campo no aparece en los libros analizados.
  - T2.7. Técnica: analizar los valores de la tabla y construir una ecuación que se ajuste a dichos valores mediante las variables x e y, es decir, realizar un ajuste numérico.
  - Tecnología: definición.
- CP2.8. Paso de gráfica a enunciado.
  - T2.8. Técnica: relacionar las variables dependiente e independiente y asociarles un enunciado en el que se verifiquen los valores de la gráfica, es decir, hacer una lectura de las relaciones que se observan en la gráfica.
  - Tecnología: gráfica y definición.
- CP2.9. Paso de gráfica a tabla de valores.
  - T2.9. Técnica: tomar puntos de coordenadas (x, y) de la gráfica y tratar de distribuirlos en la tabla de valores correctamente.
  - Tecnología: gráfica y definición.
- CP2.10. Paso de gráfica a expresión algebraica.
  - T2.10. Técnica: relacionar la variable dependiente e independiente y asociarlo a su forma algebraica, es decir, realizar un ajuste gráfico para expresar su ecuación.
  - Tecnología: gráfica y definición.
- CP2.11. Paso de expresión algebraica a gráfica.
  - T2.11. Técnica: dada la expresión algebraica, se toman valores para la variable independiente y se calcula el valor de la función para representarlo en un sistema de coordenadas.
  - Tecnología: definición y gráfica.
- CP2.12. Paso de expresión algebraica a enunciado.
  - T2.12. Técnica: dada la ecuación de una función, se trata de crear un enunciado que se ajuste a la forma de dicha ecuación.
  - Tecnología: definición.

- CP2.13. Paso de expresión algebraica a tabla de valores.
  - T2.13. Técnica: dada la expresión algebraica, se realiza una tabla con las variables dependiente e independiente, y se obtiene el valor de y calculando la imagen de x en valores concretos.
  - Tecnología: definición.

3. **CP3. Características de las funciones.**

- CP3.1. Dominio y recorrido de una función dada por su enunciado.
  - T3.1.1. Técnica: seleccionar el intervalo de los valores que puede tomar la variable independiente.
  - T3.1.2. Técnica: seleccionar el intervalo de los valores que puede tomar la variable dependiente.
  - Tecnología: definición de dominio de una función ($Dom\ f$), recorrido o imagen de una función ($Im\ f$).
- CP3.2. Dominio y recorrido de una función dada por su gráfica.
  - T3.2.1. Técnica: identificar los valores de la variable independiente para los que se representa gráficamente la función.
  - T3.2.2. Técnica: identificar los valores de la variable dependiente para los que se representa gráficamente la función.
  - Tecnología: definición de dominio, recorrido/imagen y gráfica.
- CP3.3. Dominio de una función dada por su expresión algebraica.
  - T3.3. Técnica: valores de la variable independiente con los que la función queda definida.
  - Tecnología: definición de dominio de una función.
- CP3.4. Cálculo de la imagen de un punto dada la expresión algebraica de una función.
  - T3.4. Técnica: sustituir un valor en el lugar que ocupa la variable independiente y obtener el valor de la imagen.
  - Tecnología: definición de imagen de un punto.
- CP3.5. Cálculo de la imagen y antiimagen de una función dada su representación gráfica.
  - T3.5.1. Técnica: dada la gráfica de una función para obtener la imagen se observa el valor de y para un valor concreto de la variable independiente.

- T3.5.2. Técnica: dada la gráfica de una función para hallar la antiimagen se ha de obtener el valor de x para un valor de la variable dependiente.
- Tecnología: definición y gráfica.

- CP3.6. Continuidad de una función dada por su gráfica.
  - T3.6. Técnica: la función en su dominio de definición no presenta saltos o discontinuidades. Es decir, se podría dibujar la función en un solo trazo.
  - Tecnología: definición de continuidad y gráfica.
- CP3.7. Puntos de corte de una función con los ejes dada su forma algebraica.
  - T3.7.1. Técnica: cortes con el eje de abscisas cuando la variable dependiente se anula, por tanto se resuelve la ecuación $f(x) = 0$ y se tienen los valores de x, de forma que los cortes con el eje de abscisas son de la forma (x_0, 0).
  - T3.7.2. Técnica: los cortes con el eje de ordenadas se tienen cuando la variable independiente se anula, por tanto, se calcula $f(0)$, por lo que el corte con este eje es de la forma $(0, f(0))$.
  - Tecnología: definición de puntos de corte.
- CP3.8. Puntos de corte con los ejes dada la gráfica de una función.
  - T3.8.1. Técnica: hallar el corte con el eje de abscisas mediante la identificación de los puntos de intersección de la gráfica de la función y el eje X.
  - T3.8.2. Técnica: para los cortes con el eje de ordenadas se han de identificar los puntos de intersección de la gráfica de la función con el eje Y.
  - Tecnología: gráfica y definición de puntos de corte.
- CP3.9. Crecimiento y decrecimiento de una función dada gráficamente.
  - T3.9.1. Técnica: dado un intervalo (a, b) donde $a < b$ siendo números muy próximos entre sí, estudiar si $f(b) > f(a)$ y en este caso será una función creciente en ese intervalo.
  - T3.9.2. Técnica: dado un intervalo (a, b) donde $a < b$ siendo números muy próximos entre sí, estudiar si $f(b) < f(a)$, entonces la función será decreciente en dicho intervalo.
  - T3.9.3. Técnica: dado un intervalo (a, b) donde $a < b$, siendo números muy próximos entre sí, si $f(b) = f(a)$ la función es constante en ese intervalo.
  - Tecnología: definición de crecimiento, decrecimiento y gráfica.
- CP3.10. Máximos y mínimos de una función dada gráficamente.

- T3.10.1. Técnica: se identifican los máximos y mínimos relativos al encontrar los puntos en los que una gráfica pasa de creciente a decreciente, y los puntos donde la gráfica pasa de ser decreciente a creciente, respectivamente.
- T3.10.2. Técnica: se identifica como máximo y mínimo absoluto al punto en el que la función tiene el mayor o menor valor, respectivamente.
- Tecnología: definición de máximo y mínimo relativo, máximo y mínimo absoluto, y gráfica.

- CP3.11. Periodicidad de una función dada su gráfica.
  - T3.11. Técnica: observar si la gráfica de una función se repite en intervalos de la misma longitud.
  - Tecnología: definición de periodicidad y gráfica.
- CP3.12. Simetría de una función dada algebraica y gráficamente.
  - T3.12.1. Técnica: verificar si una función cumple $f(x) = f(-x)$. Para hacerlo gráficamente, observar si la gráfica coincide si doblamos por el eje de ordenadas.
  - T3.12.2. Técnica: verificar si una función cumple $-f(x) = f(-x)$. Para hacerlo gráficamente, observar si la gráfica coincide si doblamos por el origen de coordenadas.
  - Tecnología: definición de simetría y gráfica.
- CP3.13.Tendencia de una función dada gráficamente.
  - T3.13. Técnica: encontrar el valor donde la función se estabiliza, es decir, donde comienza a tomar el mismo valor, u aproximado, según aumenta o disminuye x.
  - Tecnología: definición de tendencia y gráfica.

3. ¿Qué efectos produce dicha enseñanza sobre el aprendizaje del alumno?

En la enseñanza de este objeto matemático existen dificultades asociadas a su propia naturaleza y al proceso de aprendizaje de los alumnos.

En el inicio de las investigaciones se asocian dificultades al concepto de función, debido al uso restrictivo de las gráficas, como puede observarse en la publicación de Deulofeu, J. (2001). Las funciones en la educación secundaria: ¿para qué?, ¿cómo? Aportaciones de la investigación. *Actas de las X Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas (JAEM)*, (págs. 367-377). Zaragoza. Deulofeu alude a la dificultad de compatibilizar la adquisición de algunos conceptos y desarrollos o procedimientos con números o gráficas. Es decir, la dificultad es interpretar y construir la información recibida y traducirla “a otro lenguaje”. Además, esta dificultad se debe a que durante esta etapa académica el alumnado se sitúa ante un estado primitivo de este objeto matemático. Asimismo, otros de los obstáculos principales que destaca Deulofeu derivan de la representación punto a punto de una función y del trabajo o análisis de la continuidad de una función, ya que en ocasiones si tienen una tabla de valores y lo llevan a su forma gráfica tienden a unir estos puntos por medio de líneas rectas.

En línea con los libros analizados anteriormente, en ellos mediante ejercicios se aprenden las técnicas. Esta forma de proceder puede dar lugar a errores en el aprendizaje del concepto y propiedades de las funciones, ya que no todos los ejercicios han de seguir un mismo patrón o razonamiento. En el artículo de Ortega, T. y Pecharromán, C. (2014). Errores en el aprendizaje de las propiedades globales de las funciones. *Revista de Investigación en Educación, 12* (2), 209-221, se presenta un estudio que recoge los errores de aprendizaje de las funciones a través de las gráficas en alumnos del cuarto curso de secundaria, pero que igualmente tienen alumnos del tercer curso. Así, las dificultades y los errores más frecuentes en estos alumnos son:

- Confusión en la interpretación de símbolos y convenios con el sistema de referencia cartesiano.
- Errores de notación al representar intervalos numéricos, es decir, confusión de los puntos que pertenecen o no al dominio y recorrido de una función.
- Dificultades para identificar funciones finitas o infinitas y referir las propiedades de las gráficas a los ejes.
- Dificultades al identificar las variables dependiente e independiente, así como confusión en los ejes de abscisas y ordenadas, ya que algunos alumnos tienden a cambiarlos.
- Errores en el uso del lenguaje o símbolos matemáticos a la hora de estudiar las características de una función.
- Confusión al interpretar la monotonía de una función. Es decir, los alumnos tratan de “moverse” por los puntos de la gráfica en los que hay un cambio de monotonía, en vez de considerar los tramos de los intervalos en los que se muestra la propiedad.
- Errores en el estudio de los extremos, ya que los alumnos se fijan en los puntos de los extremos, en vez de estudiar dichos puntos y un entorno de ellos. Asimismo, en algunos casos también se observa confusión en la identificación de estos extremos con los puntos más altos o más bajos respecto el eje de abscisas.

- Errores en el uso del mismo criterio de extremo absoluto para identificar los máximos y mínimos.
- Errores en la identificación de simetrías, en concreto, en el concepto de simetría respecto el eje de ordenadas y respecto el origen de coordenadas, ya que intercambian las denominaciones.
- Dificultades para interpretar el comportamiento de la gráfica de la función fuera del intervalo en el que está representada, es decir, identificar la tendencia de la función.
- Errores en la coordinación de lo que ocurre con las dos variables a la vez.
- Confusión y errores en las definiciones de las características de una función, lo cual previsiblemente puede ser debido a un aprendizaje memorístico. Del mismo modo, también se observan errores debido a un aprendizaje memorístico de los procedimientos asociados a la representación algebraica de una función.

C. Sobre los conocimientos previos del alumno

1. ¿Qué conocimientos previos necesita el alumno para afrontar el aprendizaje del objeto matemático?

Para trabajar con las funciones los conocimientos previos que necesitan los alumnos son conceptos matemáticos generales que han estudiado en años anteriores, en concreto deberían de comprender los siguientes conceptos:

- Conocer la recta real, los números enteros, racionales y naturales, así como colocar correctamente estos números sobre la recta real.
- Conocer algunas fórmulas geométricas de perímetros y áreas de figuras.
- Saber escribir una ecuación, ya que en el mismo curso académico se dan ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Por tanto, también pueden saber representar rectas, así como evaluar un punto en una ecuación.
- Resolver ecuaciones de primer y segundo grado.
- Reconocer y dibujar puntos en un sistema de coordenadas cartesianas.
- Reconocer intervalos de números e identificar qué son.
- Reconocer variable dependiente e independiente.

2. La enseñanza anterior, ¿ha proporcionado que el alumno adquiera esos conocimientos previos?

Es posible que el alumnado posea facilidad para interpretar representaciones gráficas de una función, ya que estas se encuentran frecuentemente en diferentes aspectos de la vida cotidiana, para describir movimientos, precios, etc. por lo que es frecuente encontrar funciones en distintos medios de comunicación y publicidad. Además, en cursos anteriores al actual los alumnos también estudian contenidos de números y álgebra, geometría y funciones, tanto en 1º de ESO como en 2º de ESO. Por ello, los contenidos más recientes que propician que los alumnos adquieran los conocimientos previos se recogen en la asignatura de Matemáticas 2º ESO, en la cual por la Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, se recogen en el bloque 2 de Números y Álgebra, bloque 3 de Geometría y bloque 4 de Funciones. Específicamente, los contenidos del bloque de funciones en este curso académico son:

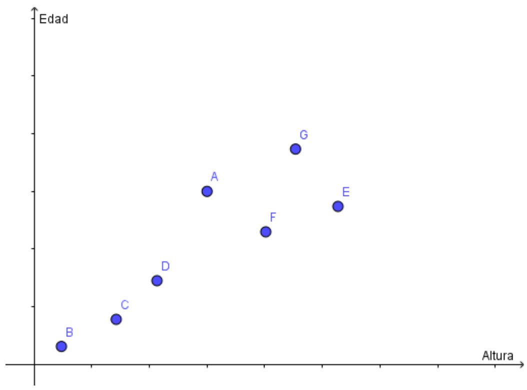
- Coordenadas cartesianas: representación e identificación de puntos en un sistema de ejes coordenados.
- El concepto de función: variable dependiente e independiente. Formas de presentación (lenguaje habitual, tabla, gráfica, fórmula). Crecimiento y decrecimiento. Continuidad y discontinuidad. Cortes con los ejes. Máximos y mínimos relativos. Análisis y comparación de gráficas.
- Funciones lineales. Cálculo, interpretación e identificación de la pendiente de la recta. Representaciones de la recta a partir de la ecuación y obtención de la ecuación a partir de una recta.
- Utilización de calculadoras gráficas y programas de ordenador para la construcción e interpretación de gráficas.

Observando estos contenidos, los alumnos deberían de tener los conocimientos previos, y es más, en el mismo curso académico de 3º ESO en el bloque 2, Números y Álgebra, se trabajan conceptos previos como los números decimales y racionales, transformaciones de estos, operaciones con fracciones y decimales, ecuaciones de segundo grado y resolución por método algebraico y gráfico, así como también la resolución de problemas mediante el uso de ecuaciones y sistemas de ecuaciones, entre otros. Por tanto, la mejor forma de conocer si poseen los conocimientos previos es realizar actividades en una sesión inicial como se detalla en la siguiente sección.

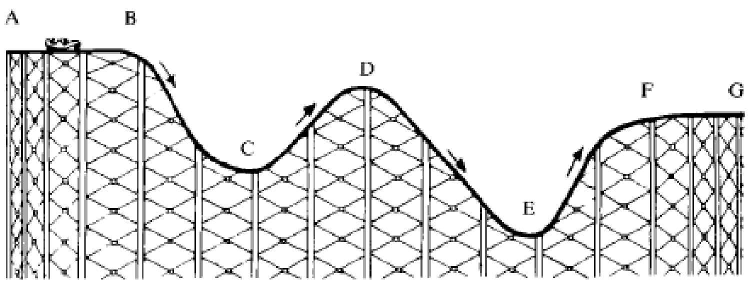
3. ¿Mediante qué actividades vas a tratar de asegurar que los alumnos posean esos conocimientos previos?

En la primera sesión se realiza una prueba para analizar los conceptos que los alumnos recuerdan, así como para identificar aquellos aspectos en los que habrá que hacer mayor hincapié en el desarrollo de la unidad. Para esta sesión de control inicial se entrega a cada alumno una hoja donde se recogen las actividades con las que evaluar sus conocimientos previos. Los alumnos dispondrán de 35 minutos para completar las actividades, y los 15 minutos restantes se dedican a hacer una puesta en común de algunas de las actividades.

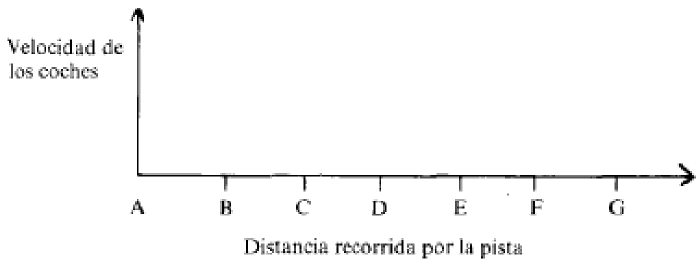
Actividad 1. Rutina "veo, pienso, me pregunto". Observa la siguiente gráfica y extrae toda la información que puedas de ella en la hoja proporcionada por el profesor (Anexo A). <u>Nota</u>*: Piensa qué representan los puntos, la forma en que están colocados, cuáles son las variables que intervienen, las coordenadas de los puntos, en qué puntos la edad es mayor, en cuáles menor, etc.*



Actividad 2. La montaña rusa. Extraído del libro El lenguaje de gráficas y funciones (Alayo, 1990, pág. 22). El siguiente dibujo muestra la pista de una montaña rusa en la que los coches viajan entre A y B a una velocidad lenta y constante.



¿Cómo variará la velocidad de los coches cuando van de A a G? Describe tu respuesta por escrito y mediante una gráfica.



Una vez que lo hayas dibujado, dobla esta hoja de modo que no puedas ver el dibujo de la pista de la montaña rusa. Intenta responder a las siguientes preguntas utilizando sólo la gráfica que tú has dibujado:

- ¿En qué partes de la pista aumenta la velocidad del coche? ¿Y en cuáles disminuye?
- ¿Dónde tiene mayor velocidad el coche, en B o en D?

Después, observa la gráfica inicial de la pista de la montaña rusa y corrige tus respuestas, cambia de color en caso de que corrijas tú respuesta y modifica la gráfica que describe la velocidad.

Actividad 3. En la siguiente tabla se muestra el precio del kilo de cerezas en un supermercado:

Peso (kg)	1	2		5	
Precio (€)	6,30		18,9		44,1

a. Rellena los huecos que faltan en la tabla.
b. Representa gráficamente los datos de la tabla.
c. Obtén una ecuación para esta situación, ¿cuánto cuestan $10kg$ de cerezas?

Finalmente, una vez que los alumnos hayan acabado las actividades, en los siguientes 15 minutos el docente junto con los alumnos proceden a la corrección de las actividades 1 y 2, así como a inventar un posible enunciado para la actividad 1. Cabe destacar que durante la corrección no podrán modificar nada de la hoja a entregar con las soluciones. Por tanto, inicialmente se crea un debate preguntando a los alumnos la forma de realizar las actividades, se apuntan en la pizarra las ideas y formas de proceder y finalmente se resuelven esas actividades.

Por tanto, para concluir con la sesión inicial se recogen las fichas de las actividades de todos los alumnos y el docente realiza una revisión individual para observar que aspectos habrá que reforzar y en qué hacer más hincapié a lo largo de la unidad.

D. Sobre las razones de ser del objeto matemático

1. **¿Cuál es la razón o razones de ser que vas a tener en cuenta en la introducción escolar del objeto matemático?**

El objeto matemático de función tiene como principal razón de ser la modelización de situaciones cotidianas de la vida, así como la aplicación de estos a otras ramas de las matemáticas. Por tanto, la introducción escolar seleccionada para presentar este objeto se basa en las relaciones que se pueden encontrar en determinadas situaciones de la vida. Así, dicho objeto matemático se da como relación de dos magnitudes o variables.

Evidentemente, cada situación a modelizar requiere un modo u otro de representar la función tal que sea el que mejor se adapte a la situación. Debido a ello, se estudian las distintas formas de representar una función, ya sea a través de un enunciado o una descripción verbal, de una fórmula, gráfica o tabla de valores.

Inicialmente se trata de que el alumnado conozca el concepto de función y la relación entre las variables correspondientes, y posteriormente, se trabaja de una forma más visual mediante representación gráfica. Con esta última forma se adquiere mayor destreza y habilidad en el trabajo de las funciones, ya que las gráficas permiten analizar las funciones de una forma más intuitiva y conocer características de ellas que se estudiarán en los cursos académicos siguientes. Por tanto, durante la unidad se trata de que el alumnado conozca este objeto matemático mediante la vida real para concienciarles de la importancia y utilidad de las funciones.

2. **¿Coinciden con las razones de ser históricas que dieron origen al objeto?**

La razón de ser histórica que dio lugar a las funciones, coincide con la razón de ser con la cual se introduce el objeto matemático. El concepto de función ha evolucionado a lo largo de la historia, por lo que durante dicha evolución se encuentran diversas definiciones y cada una de ellas se corresponde con distintos niveles de abstracción. Durante la historia el concepto de función puede remontarse hasta hace unos 4000 años, aunque este ha evolucionado conforme avanzan los años y se considera que la verdadera definición de función se remonta en torno a mediados del siglo XVIII.

La evolución histórica de las funciones se divide en tres principales períodos (Díaz Gómez, 2013).

- **Edad Antigua.**

La Edad Antigua se caracteriza por la cultura Babilónica y Griega, además se conoce a las matemáticas de esta época como matemáticas antiguas o prehelénicas.

Youschkevitch (1976) afirmó que no había ninguna idea general del concepto de función en la matemática de esta época.

Para Euclides, en su obra "Los Elementos", los objetos matemáticos y las relaciones se presentaban estáticos. Esto no le condujo a las funciones, pero le llevó a las proporciones y ecuaciones, ya que se consideraban números enteros y discretos, y a las magnitudes continuas, lo cual hizo complicado formar la noción de función.

Durante la antigüedad se llevaron a cabo diferentes estudios sobre casos de dependencias entre cantidades de distintas magnitudes, pero no alcanzaron las nociones generales de función y de variable.

- **Edad Media.**

Esta época se divide en dos períodos, el primero de ellos hasta, aproximadamente, el año 1200, y el segundo, a partir del siglo XIII. Fue durante este segundo período donde surgieron tratados sobre proporciones (una teoría básica en todas las ciencias cuantitativas hasta la época de Newton, $1642 - 1727$), trabajos que equivalen en álgebra a relaciones de la forma $y = kx^n$, con n racional y k una constante. Por tanto, en este período aparecieron ideas que giraban en torno al concepto de variables dependientes e independientes, pero no se dio una definición formal de función, aunque sí se dieron mediante propiedades y gráficos.

En esta época destacó Nicolás de Oresme (1323 – 1382), quién fue el primero en dibujar funciones con tasa de cambio, es decir, mediante la presentación gráfico-geométrica trató de modelar la forma en que algunas cosas varían, en concreto, algunos fenómenos como la velocidad.

Por tanto, se finalizó este período con una teoría primitiva de las funciones que estaba relacionada con la dependencia de una cantidad variable sobre otra.

- **Edad Moderna.**

Durante los inicios de esta época surgieron los desarrollos fundamentales para el concepto de función: la unión entre el álgebra y geometría, la introducción del movimiento como problema central en la ciencia, la aparición del álgebra simbólica, y la geometría analítica.

Entre los manuscritos de Leibniz (1673) apareció por primera vez la palabra "función", mediante esta palabra se refirió a cualquier cantidad que podía variar de un punto a otro de una curva. Posteriormente, en 1718 Bernoulli en un artículo introdujo la primera definición formal de dicho objeto matemático: "Por función de una cantidad variable, denotamos aquí una cantidad construida de un modo u otro con esta cantidad variable y constantes" (Díaz Gómez, 2013).

Posteriormente, surgen cuatro grandes etapas dentro de la evolución del concepto de función desde inicios del siglo XVIII.

- ***Primera etapa (s. XVIII).***

El concepto de función está asociado a Euler $(1707 - 1783)$, es una ecuación o una fórmula, ya que definió una función del siguiente modo: "La función de una cantidad variable es una expresión analítica construida de un modo u otro con esta cantidad variable y números o constantes" siguiendo la definición expuesta por su maestro Bernoulli (Díaz Gómez, 2013).

Además, Euler incluyó tanto funciones implícitas como explícitas. Esta definición se mantuvo hasta 1800, aproximadamente, hasta que Fourier encontró relaciones generales entre las variables en su estudio sobre las series trigonométricas.

- ***Segunda etapa (s. XIX).***

En esta etapa destaca Fourier, quién revolucionó el concepto de función, ya que en 1822 publicó una definición en la que hacía ver que la idea principal de función era la asignación de valores: "Una función $f(x)$ representa una sucesión de valores u ordenadas cada una de las cuales es arbitraria. Para una infinidad de valores dados a la abscisa x, hay un número igual de ordenadas $f(x)$. Todas tienen verdaderos valores numéricos, ya sean positivos o negativos o nulos. No suponemos que estas ordenadas estén sujetas a una ley común; se siguen una a la otra, de cualquier manera, como sea, y cada una de ellas está dada como si fuera una cantidad única" (Díaz Gómez, 2013).

- ***Tercera etapa (s. XIX).***

Posteriormente, Dirichlet en 1829 formuló la definición moderna de función de una variable independiente x en un intervalo (a, b), donde $a < b$. Aunque dicha definición fue general, ya que no entró en detalles de expresar la función mediante una fórmula: "y es una función de la variable x, definida en el intervalo $a < x < b$, si para todo valor de la variable x en ese intervalo, le corresponde un valor determinado de la variable y. Además, es irrelevante como se establece esa correspondencia" (Sastre Vázquez, P., Rey, G. y Boubée, G., 2008).

Entre esta época, tuvieron lugar diversos debates entre matemáticos muy importantes como Fourier, Cauchy, Riemann, Dirichlet, Weierstrass, Lebesgue y Borel, ya que todos ellos trabajaron en el desarrollo del concepto histórico de función.

- ***Cuarta etapa (s. XX).***

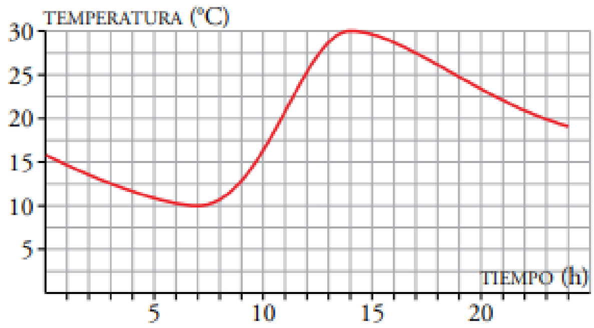
Finalmente, en esta etapa destacó Bourbaki ya que en torno a 1939 presentó una definición general de función como regla de correspondencia entre el dominio y el rango, considerando dichos conjuntos como arbitrarios: "Sean E y F dos conjuntos, que pueden o no ser distintos. Una relación entre un elemento variable x de E y un elemento variable y de F, se llama relación funcional en y, si para todo x en E, existe un único y en F el cual está en la relación dada con x. Damos el nombre de función a la operación que, de esta forma, asocia cada elemento x en E con el elemento y en F que está en relación con x, se dice que y es el valor de la función en el elemento x, y se dice que la función está definida por la relación dada. Dos relaciones funcionales equivalentes determinan la misma función" (Sastre Vázquez, P., Rey, G. y Boubée, G., 2008).

Por tanto, las investigaciones del concepto de función y su evolución muestran que es un concepto complejo, ya que no es fácil de enseñar y aprender sin conocimientos previos.

3. Diseña uno o varios problemas que se constituyan en razones de ser de los distintos aspectos del objeto matemático a enseñar

A continuación se va a mostrar un sencillo problema, donde el alumnado observaría una gráfica que habrían de interpretar, así como analizar y obtener de ella características de las funciones que se estudian en la unidad. Posteriormente se muestra otro problema en el que se ha de establecer una relación entre dos variables, contestar a las cuestiones que se piden y realizar una representación gráfica.

Problema 1. En la imagen inferior se muestra una gráfica que indica el cambio de la temperatura a partir de las $0h$ de la madrugada en la ciudad de Zaragoza.



Observa detenidamente la gráfica y responde a las siguientes cuestiones:

a. ¿Durante qué intervalo de tiempo se ha estudiado el cambio de temperatura? ¿Con qué característica de las funciones se corresponde (dominio, recorrido,…)?
b. ¿Cuál es la máxima temperatura y a qué hora se alcanza?
c. ¿En qué intervalos de tiempo sube la temperatura? ¿Y en cuáles disminuye?
d. María sale de su casa para ir a trabajar a las $7h$, generalmente. Además, es un poco friolera, ayuda a María a decidir si ponerse o no su cazadora antes de salir de casa.
e. ¿A qué hora/s se alcanzarán los 25ºC en la ciudad?
f. Observando las variaciones de temperatura que presenta el gráfico, ¿te atreverías a decir en qué época del año nos encontramos?

Problema 2. Laura ha decidido crear un álbum de fotografías tras sus últimas vacaciones de verano, ha observado diferentes páginas online dedicadas a ello y está dudando entre dos de ellas. En la primera le ofrecen revelar sus fotos por 0,62€ cada una más gastos de envío de 4,99€. Sin embargo, en la segunda le ofrecen revelar cada una de sus fotos por 0,76€ con 1,95€ de gastos de envío.

a. Obtén una expresión algebraica que represente el coste del revelado de fotos para las dos opciones de las que dispone Laura.
b. ¿Qué tienda resulta más económica si quiere imprimir 18 fotografías? ¿Y si quiere imprimir 27?
c. Representa gráficamente la función coste de la impresión de fotografías en función del número de fotos. Observa la gráfica y analiza si tus respuestas del apartado anterior son correctas.

4. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula

La metodología a seguir con los problemas anteriores sería la siguiente. En las sesiones en que se realicen los problemas los alumnos forman grupos de 2 o 3 para resolverlos y se entregan los problemas a cada alumno. El primer paso es que cada alumno de forma autónoma lea los problemas y piense cómo resolverlos, sin llegar a hacerlo. En el segundo paso, los miembros de cada grupo podrán exponer sus ideas y explicarse entre ellos cómo se enfrentarían al problema (se trata de que aquellos que no entiendan los enunciados o no sepan cómo afrontarlos puedan ser ayudados por sus compañeros). Finalmente, mediante el trabajo en grupo resolverían y redactarían los problemas.

Cabe destacar que mientras que los alumnos realizan los problemas, el profesor pasa por los grupos por si surgen dudas. Una vez que todos ellos hayan finalizado, se procede a su corrección entre toda la clase, una buena forma de poder conocer y analizar otros puntos de vista.

E. Sobre el campo de problemas

1. Diseña los distintos tipos de problemas que vas a presentar en el aula

A continuación se muestran problemas en función de los diferentes campos detallados en la Sección B.2.

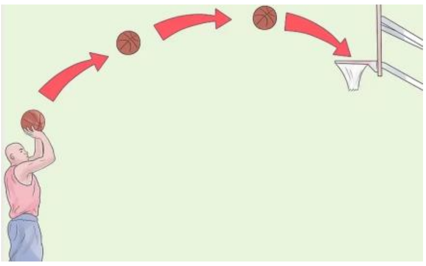
1. CP1. Concepto de función.

Problema 1. Durante el sábado Alejandro realizó una excursión con su familia al monte y recogió los siguientes datos:

- Durante la primera hora de salida anduvimos 4,5 kilómetros.
- Después, realizamos un descanso de 20 minutos.
- Nos pusimos en marcha durante 30 minutos, y tuvimos que parar un par de minutos porque se me metió una piedra al zapato. Desde la última parada habíamos caminado tan solo $1{,}2km$.
- Continuamos la andada durante 75 minutos y anduvimos unos $6km$.
- Paramos a comer en la zona de picnic y dos horas más tarde comenzamos la vuelta a casa por otra ruta.
- Tras andar 5,6 km durante 1 hora y tres cuartos decidimos descansar media hora.
- Finalmente, emprendimos la vuelta a casa y tras 4,9 km llegamos al mismo punto del que partimos.

Realiza la gráfica correspondiente a la relación de kilómetros en función del tiempo que Alejandro y su familia caminaron, y observa qué ruta es más corta, la que realizan desde que parten hasta la hora del picnic o la de la hora del picnic hasta el regreso al punto de partida.

Problema 2. Observa la siguiente imagen y piensa cómo podría variar la velocidad del siguiente tiro a canasta. Explícalo y dibuja cómo crees que sería la gráfica que relacione la velocidad-tiempo de dicho tiro.



Problema 3. Ana ha rellenado una jarra de agua como la de la figura. Para ello ha dejado abierto un grifo y el agua caía a una velocidad constante hasta que alcanzó el nivel de agua que se muestra a la derecha de la imagen. ¿Cómo será la gráfica que relaciona la altura con la que se llena la jarra frente al tiempo?

2. CP2. Relaciones entre sistemas de representación.

Problema 4. Está llegando el verano y Santiago quiere llenar por completo su piscina. Esta es de forma rectangular y de fondo plano con $1{,}50m$ de altura, $8m$ de largo y $4m$ de ancho. Del verano pasado a este verano conservó agua hasta una altura de $0{,}90m$ con productos específicos para poder conservar esta agua, ahora Santiago continúa con el llenado de la piscina con una manguera con un caudal de $850\ L/h$.

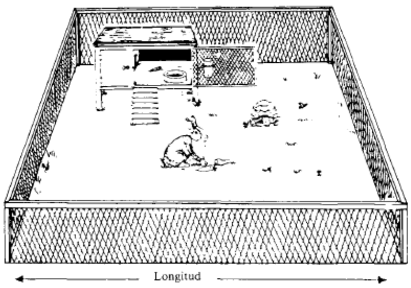
a. Haz una tabla de valores en la que se represente la altura del agua de la piscina en relación al tiempo.
b. ¿Cómo será la expresión algebraica correspondiente a la altura del agua de la piscina frente al tiempo?
c. Desde el primer momento en el que Santiago comenzó a llenar la piscina con la manguera, ¿cuánto tiempo tardó en llenarse la piscina?
d. Realiza la representación gráfica de la función obtenida.

Problema 5. Generalmente, la longitud de la diagonal de un televisor la damos en pulgadas. Si 1 pulgada equivale a $2{,}54cm$, obtén una función que las relacione y rellena la siguiente tabla de valores:

Centímetros							
Pulgadas	22	24	32	38	48	55	60

Problema 6. Dos amigos, Juan y Luis, viven en el pueblo A pero han quedado en encontrarse en el pueblo B para comer. Juan parte del pueblo A en bicicleta hacia el pueblo B a las $9h$ a una velocidad constante de $20km/h$, y media hora más tarde, Luis parte del pueblo A con una velocidad constante de $25km/h$. Si la distancia entre ambos pueblos es de $65\ km$, ¿en algún momento alcanzará Luis a Juan?, ¿a qué hora llegará cada uno de ellos al pueblo B?. Realiza las gráficas que relacionan el tiempo y distancia que recorren estos dos amigos en un mismo sistema de coordenadas.

Problema 7. La conejera. Adaptación del libro El lenguaje de gráficas y funciones (Alayo, 1990, pág. 101)**.** Tienes que construir una conejera en forma rectangular que tenga $22m$ de perímetro, pero de momento no conoces como serán las dimensiones de dicho rectángulo. Piensa en esta situación y trata de responder los siguientes apartados:



a. Realiza una tabla de valores que relacione el área de la conejera en función de la longitud de uno de sus lados.
b. Observando dicha tabla, trata de obtener alguna relación y coméntala, es decir, trata de hallar una fórmula algebraica para esta situación.
c. Realiza una gráfica que represente la relación entre la longitud y el área de la conejera.
d. ¿Cuál es el área máxima que puede tener la conejera?

Problema 8. Entre las clases de 3º ESO suman 62 alumnos y un grupo de amigos quiere organizar una fiesta de fin de curso el próximo mes de junio. Para ello han buscado una sala en la que pueden hacer distintas actividades, el alquiler del día cuesta 400€ cuyo precio tendrán que pagar equitativamente entre todos los asistentes. Por tanto, a mayor número de alumnos que vayan a la fiesta, menos cantidad de dinero tendrá que pagar cada uno. Realiza en una hoja de cálculo las siguientes cuestiones:

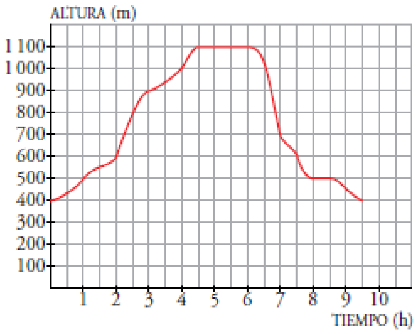
a. Haz una tabla de valores en función de la cantidad de alumnos y el precio correspondiente a pagar por cada uno (considerar para los datos intervalos de 5 o 10 personas).
b. Dibuja en la hoja de cálculo una gráfica para la situación anterior.
c. ¿Cuánto dinero tendrá que pagar cada uno de los estudiantes si a la fiesta van 32 personas? ¿Y si van 48?

Problema 9. Un restaurante italiano realiza la compra semanalmente a un proveedor de pasta, en particular, compra ravioli que cuestan $3{,}58€/kg$. Normalmente compra unos $18kg$ para los días laborables, pero tiene que comprar extra para el fin de semana. Realiza las siguientes cuestiones en una hoja de cálculo:

a. Completa una tabla de valores en función de la cantidad de kilos de ravioli y el precio que tendrá que pagar el restaurante al proveedor. *Nota: como máximo el proveedor puede garantizarle 35kg de ravioli.*
b. Da una expresión algebraica correspondiente al precio que ha de pagar el restaurante según los kg de ravioli que compren.
c. Realiza la gráfica correspondiente a la situación descrita en a.
d. En caso de que el restaurante compre para toda la semana $29kg$ de ravioli, ¿cuánto tendría que pagar al proveedor?

3. <u>CP3. Características de las funciones.</u>

Problema 10. Un grupo de amigos va a subir una montaña como la que se muestra en la siguiente figura, donde se observa la altura desde que comienzan a caminar:



Responde a los siguientes apartados:

a. ¿Cuánto tiempo tardaron en subir y bajar la montaña?
b. ¿Desde qué altura parten para comenzar la subida de la montaña?

c. ¿A qué altura se encuentra la cima de la montaña, y en qué momento se alcanza?
d. ¿En qué intervalos van hacia arriba y hacia abajo?
e. ¿Hay tramos con altura constante? ¿Cuáles?
f. ¿En qué tiempo se encuentran a una altura de $600m$?
g. ¿A qué altura se encuentran a las 4 horas desde que partieron?
h. En conceptos más técnicos de las funciones, ¿es una función continua? Indica su dominio e imagen.

Problema 11. Adaptación del libro Anaya (Colera Jiménez, J., Gaztelu Albero, I., Oliveira González, M.J. y Colera Cañas, R., 2015, pág. 157). A continuación se muestra una tabla con los valores asociados al movimiento de la cabina de una noria que está a nivel del sueño. Estos datos recogen cómo aumenta la altura respecto del tiempo, donde la altura máxima que alcanza esta noria es de 16 metros, y posteriormente, vuelve a bajar. Se pide:

Altura (m)	0	4	8	12	14	16
Tiempo (s)	0	6	12	18	24	30

a. Dibujar la gráfica correspondiente a la altura de la cabina que se ha tomado como referencia respecto del tiempo en cuanto la noria se pone en marcha, representa dos vueltas.
b. ¿Qué se puede observar en la gráfica?
c. Trata de explicar a qué altura se encuentra la cabina con la que se ha tomado la referencia en el segundo 120 y en el 140.
d. Pregunta extra: observa la altura máxima de la noria, ¿cuánto mide su radio?

2. ¿Qué modificaciones de la técnica inicial van a exigir la resolución de dichos problemas?

Para **introducir el concepto de función**, generalmente los libros se basan en identificar las variables y la relación entre ellas. Sin embargo, con los problemas propuestos anteriormente se trata de que se introduzca el concepto de función y variables dependiente e independiente de otro modo. En el *Problema 1* se trata de que los alumnos comprendan el enunciado y recojan los datos necesarios para realizar la representación gráfica. Sin embargo, en los *Problemas 2 y 3*, se trata de observar la relación entre las variables presentes y realizar las gráficas correspondientes.

Para establecer **relaciones entre los sistemas de representación** (CP2), se han utilizado técnicas similares a las que presentan los libros de texto.

En el *Problema 4* se trata de construir una tabla de valores para la altura del agua de la piscina frente al tiempo para posteriormente obtener la fórmula de dicho llenado, y realizar una gráfica. El *Problema 5* se trata de expresar la forma analítica de la función correspondiente y rellenar la tabla de valores. En el caso del *Problema 6*, se trata de que mediante el enunciado del problema los alumnos sean capaces de realizar las dos funciones correspondientes a cada amigo en un mismo sistema de coordenadas con el fin de comparar dichas funciones y responder a las preguntas. El *Problema 7* es diferente a los usuales de los libros de texto analizados y el más completo, ya que se trata de que mediante el enunciado los alumnos construyan una tabla de valores que relacione el área de la conejera y la longitud de un lado del rectángulo. Además, se pide obtener la expresión algebraica y la gráfica correspondiente. Cabe destacar que en este problema es más costoso hallar la relación o la regla que relaciona el área con la longitud del lado.

En los *Problemas 8 y 9*, se procede de una forma similar haciendo uso de una hoja de cálculo, ya que se trata de que los alumnos sepan aplicar estas técnicas de otra forma a la habitual y también sean capaces de analizar las gráficas a través del ordenador.

Para estudiar las **características de las funciones** se han usado técnicas como las que se pueden encontrar en los libros de texto. En el *Problema 10* se trata de que los alumnos estudien una gráfica situada en un contexto real y mediante el análisis visual de esta puedan contestar a las preguntas del problema en las que se presentan características de las funciones. Por otro lado, en el *Problema 11* mediante una tabla de valores los alumnos han de realizar la representación gráfica de la altura de la noria, y además han de extrapolar para dibujar dos vueltas completas. Después, se trata de que observen la gráfica dibujada para analizar su período, y encontrar la altura a la que se encontrará la cabina a los 120 y 140 segundos.

3. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula

Los problemas presentados anteriormente, salvo el *8* y *9*, se trabajan dentro del aula, para ello se forman grupos heterogéneos de 2 a 3 personas y se reparten fotocopias para cada uno de los alumnos. Todos estos problemas están contextualizados en situaciones cotidianas o de la vida real, y se pretende que mediante su resolución se adquieran los conceptos de las funciones y las distintas formas de representarlas.

En el aula, se trata de que mediante estos pequeños grupos los alumnos procedan a la resolución de problemas de forma colaborativa, ya que se pretende que se ayuden y expliquen conceptos entre ellos. Durante este proceso, el profesor realiza el papel de "ayudante" y pasa entre los grupos para observar cómo todos ellos trabajan y resuelve las dudas mediante un intercambio de preguntas con los alumnos, así como también da las pistas o las sugerencias necesarias en determinados casos. Finalmente, cuando todos o la mayoría de grupos hayan finalizado los problemas, la forma de corregir más conveniente es mediante una puesta en común de toda la clase. Con ello se trata de generar un debate entre los alumnos para observar qué técnicas han utilizado en la resolución de estos problemas y analizar las más convenientes para cada situación.

Cabe destacar que los *Problemas 10* y *11*, también en el aula, se realizan mientras se resuelven con una puesta en común, es decir, los alumnos anotan sus respuestas en el papel y mientras tanto las comentan al profesor, quien anota tanto las respuestas correctas como las incorrectas, para después comentar los métodos correctos e institucionalizar las características de las funciones.

Por otro lado, los alumnos realizarán los *Problemas 8* y *9* en el aula de informática, ya que se busca que se familiaricen con las herramientas tecnológicas, para así desarrollar dicha competencia. Inicialmente, el profesor explica las herramientas necesarias a utilizar en la hoja de cálculo, para que luego trabajen en los ordenadores por parejas. Después, el desarrollo y la resolución de los problemas se realiza de forma análoga a la anterior, cada alumno tendrá una hoja de respuestas y el profesor hace el papel de "ayudante" y supervisor. Finalmente, para proceder a la corrección, se realiza una puesta en común y se comentan los resultados. Así, con este tipo de problemas también contextualizados en situaciones cotidianas de la vida, se busca motivar e incentivar al alumnado al estudio de las funciones con el uso de las nuevas tecnologías.

F. Sobre las técnicas

1. Diseña los distintos tipos de ejercicios que se van a presentar en el aula

Los ejercicios que se muestran a continuación están diseñados para trabajar distintas técnicas según cada uno de los campos de problemas detallados anteriormente.

1. <u>CP1. Concepto de función.</u>

Dentro de este campo de problemas los ejercicios se enfocan en analizar si los casos que se presentan se corresponden con una función o no.

Ejercicio 1. Observa las siguientes expresiones algebraicas, ¿son funciones?

a. $f(x) = 5x + \frac{1}{2}$

b. $f(x) = -x^2$

c. $f(x) = 8$

d. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

Ejercicio 2. Indica si las siguientes relaciones se corresponden con una función.

a. El número de chuches que se compran y el precio a pagar.
b. El número de DNI y la suma de sus dos últimos dígitos.
c. El número de hijos asociado a cada persona.
d. El área de un triángulo según la altura.

Ejercicio 3. Observa si las siguientes tablas de valores representan una función.

a.

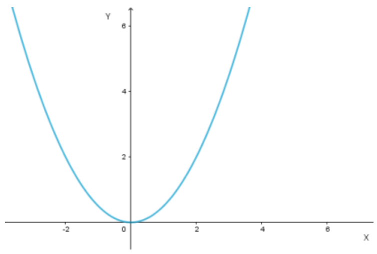
x	0	2	5	8	11
$f(x)$	5	7	10	13	16

b.

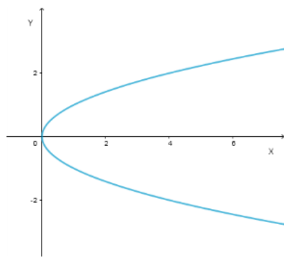
x	0	1	2	3	3
$f(x)$	2	-1	0	3,5	4

Ejercicio 4. Observa las siguientes gráficas e indica si representan una función o no.

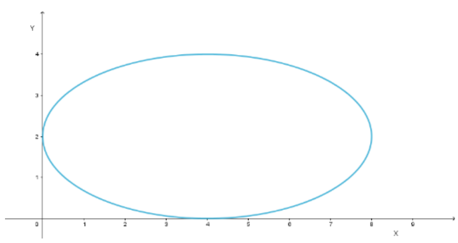
a.



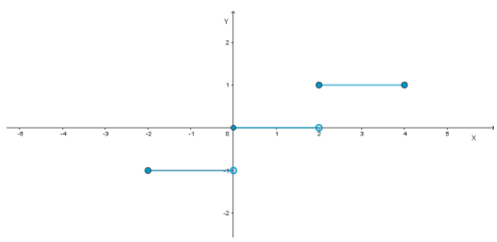
b.



c.



d.



2. CP2. Relaciones entre sistemas de representación.

Ejercicio 5. Observa los siguientes casos, después construye una tabla de valores y una expresión algebraica para cada caso.

a. A cada número le corresponde el opuesto menos una unidad.
b. A cada número le corresponde la resta de su cubo y tres unidades.
c. Área de un cuadrado según la longitud de sus lados.

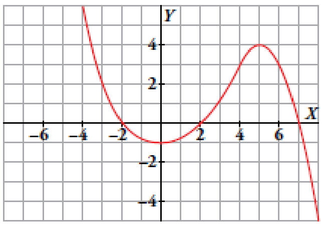
Ejercicio 6. Observa los siguientes casos y realiza su representación gráfica apoyándote en una tabla de valores.

a. A cada número le corresponde la mitad.
b. A cada número le corresponde el cuadrado del doble de dicho número menos una unidad.
c. El área de un rectángulo en función de sus lados, siendo el lado pequeño la mitad del lado grande.

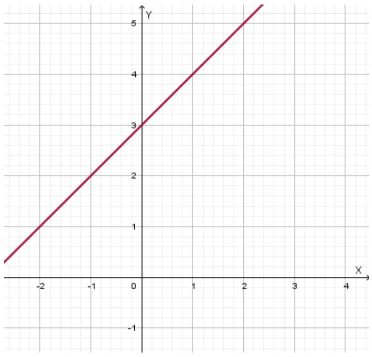
Ejercicio 7. Construye una tabla de valores asociada a cada gráfica.

a.

b.



Ejercicio 8. Inventa un enunciado para la siguiente gráfica, y extrae la expresión algebraica correspondiente.



Ejercicio 9. Dadas las siguientes expresiones, construye una tabla de valores y una gráfica correspondiente a cada una de ellas.

a. $f(x) = x^2 - 2$
b. $f(x) = \frac{x}{2} + 4$
c. $f(x) = (x-1)^2$
d. $f(x) = 3$

Ejercicio 10. Dada la siguiente tabla de valores, realiza su gráfica y obtén su expresión algebraica.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	-2	1	4	7	10

3. CP3. Características de las funciones.

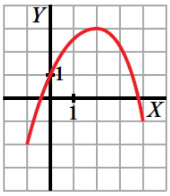
Ejercicio 11. Halla el dominio y recorrido de las siguientes funciones:

a. $f(x) = x^2 + 1$

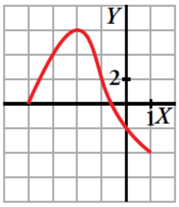
b. $f(x) = \sqrt{3x}$

c. $f(x) = \frac{4}{3x}$

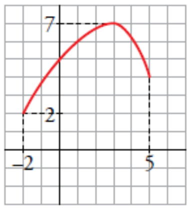
d.



e.



f.



Ejercicio 12. Dada la función $f(x) = 3x^2 - 2$, calcula la imagen en los puntos $x = 0$, $x = -2$ y $x = 5$.

Ejercicio 13. Halla los puntos de corte de las siguientes funciones, de las cuatro primeras dada su expresión algebraica, y en las tres siguientes observando su gráfica.

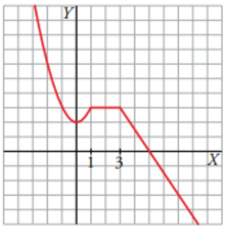
a. $f(x) = x^2 - x - 6$

b. $f(x) = \frac{x^2-3}{2}$

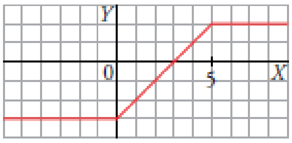
c. $f(x) = 3(x + 1)$

d. $f(x) = 2 + (-3)$

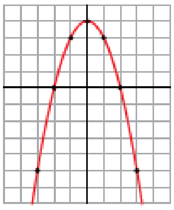
e.



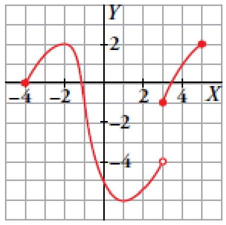
f.

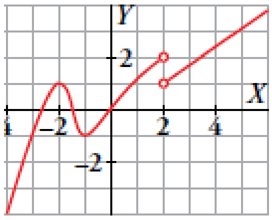


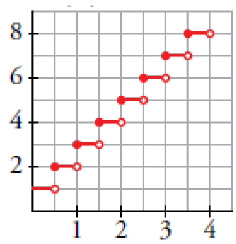
g.



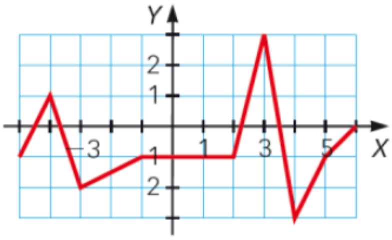
Ejercicio 14. Observa si las siguientes funciones son continuas y estudia para los dos primeros casos los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

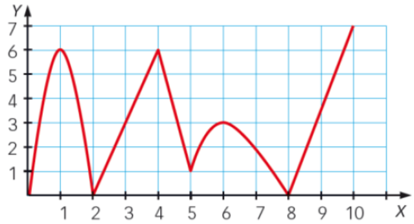
a. 

b. 

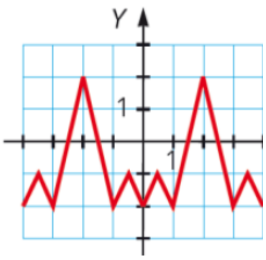
c. 

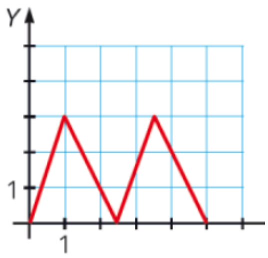
Ejercicio 15. Observa las siguientes gráficas e indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos de dichas funciones.

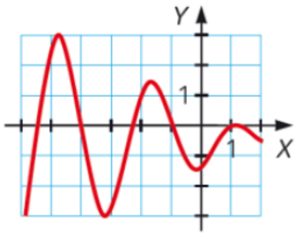
a. 

b. 

Ejercicio 16. Observa las siguientes gráficas, ¿son periódicas?, y si es así ¿cuál es su período?

a. 

b. 

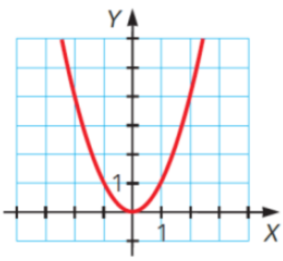
c. 

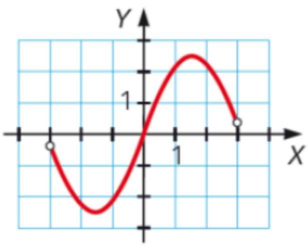
Ejercicio 17. Analiza si las siguientes funciones son simétricas, en caso afirmativo indica qué tipo de simetría tienen.

a. $f(x) = x^2 + x$

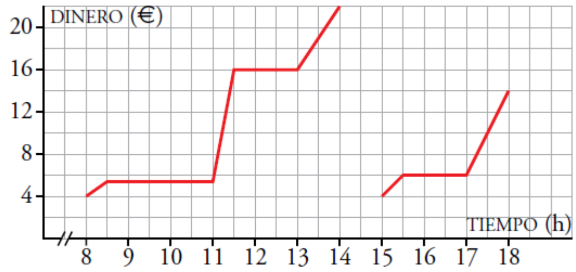
b. $f(x) = -\frac{x}{2}$

c. $f(x) = x^3$

d. 

e. 

Ejercicio 18. Analiza la siguiente gráfica e inventa un posible enunciado que represente a dicha gráfica. Además, estudia el dominio, recorrido, continuidad, si hay algún corte con los ejes y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

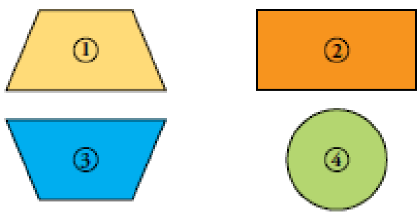


Ejercicio 19. Adaptación del libro Anaya (Colera Jiménez, et al., 2015, pág. 159). Una de las fuentes del parque de atracciones de Zaragoza vierte agua que proviene de una cisterna cuya altura es de $90cm$. Además, esta cisterna tarda 3 minutos en llenarse, y se tiene una relación entre la altura *(h)* del agua en la cisterna y el tiempo *(t)* transcurrido dada por la siguiente tabla:

t (min)	0	1	1,5	2	3
$altura\ (cm)$	0	50	67,5	80	90

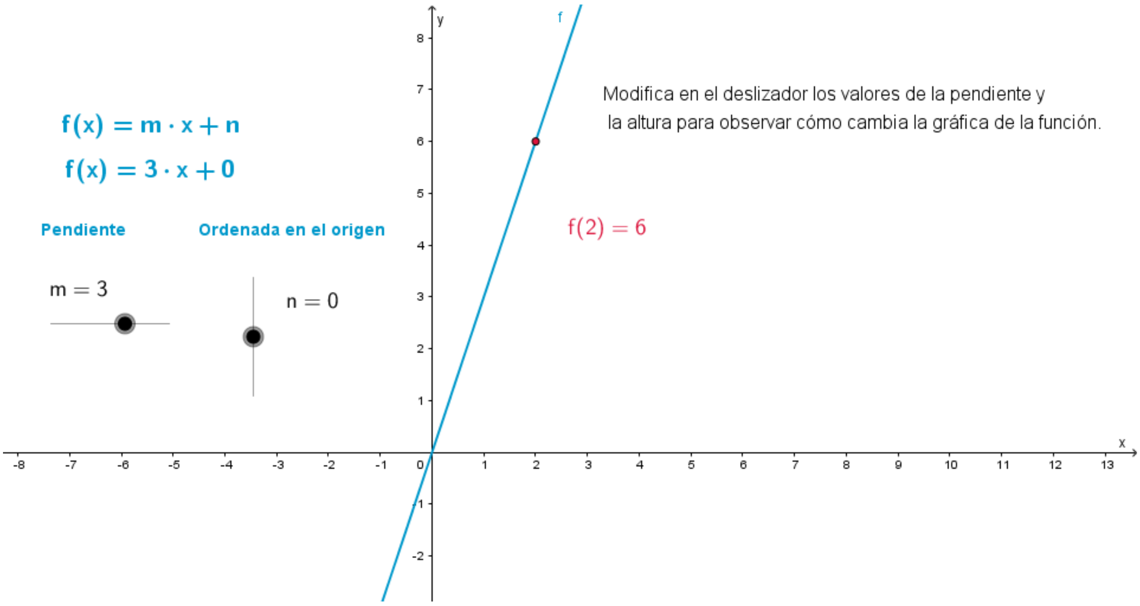
La cisterna se vacía en 3 minutos a la misma velocidad. Posteriormente, durante un minuto el agua circula por una tubería, regresa a la cisterna para llenarla, y así sucesivamente.

a. Completa la tabla de valores hasta un tiempo de 10 minutos.
b. Realiza una gráfica que represente el tiempo y la altura.
c. Estudia la continuidad de la función, ¿es simétrica?, ¿es periódica? En caso afirmativo a alguna de estas preguntas, indica qué tipo de simetría tiene o cuál es su período.
d. Observando la gráfica que has dibujado, razona con qué rapidez sube el agua en cada minuto.
e. Pensando en la respuesta que has dado en el apartado anterior, ¿cuál de las siguientes figuras representaría la forma de la cisterna?



Ejercicio 20. En GeoGebra realiza las siguientes tareas:

a. Dibuja una función lineal con las constantes que tú elijas.
b. Indica dónde corta los ejes la función que has dibujado.
c. Abre el archivo *"lineales.ggb"* (Anexo B) proporcionado por el profesor, en este archivo dispones de una función lineal de la forma $f(x) = m \cdot x + n$ donde m es la pendiente de la función y n su ordenada en el origen. En el archivo encontrarás el programa correspondiente a la siguiente imagen:



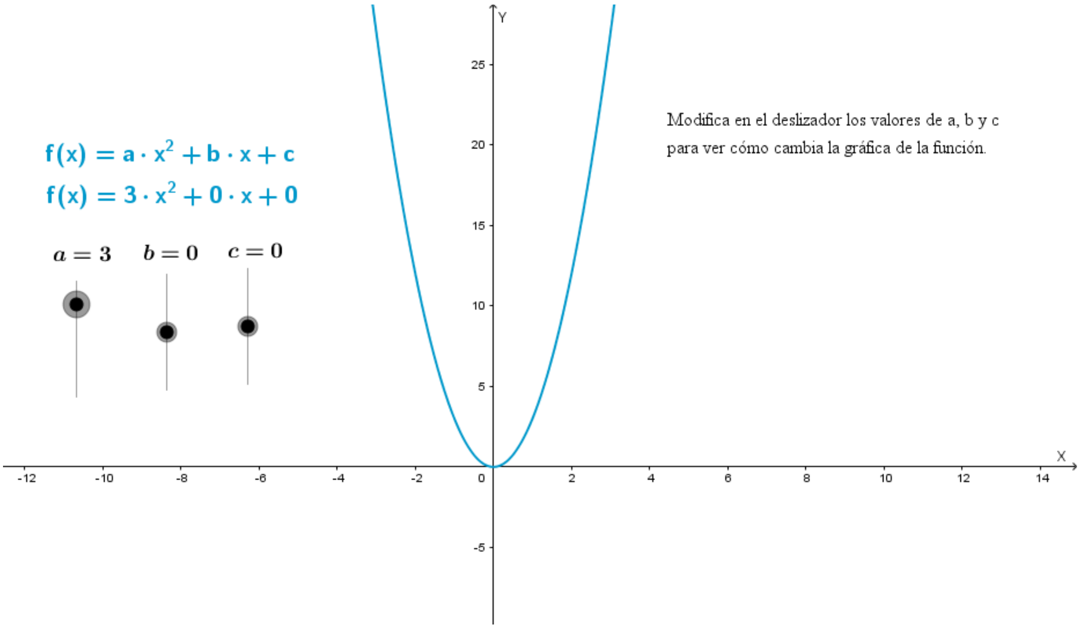
Varía estos valores con los deslizadores y observa cómo cambia la función. Además, compárala con la que has dibujado.

d. Para valores de $m = 1$ y $n = 1$, obtén el valor de f en los puntos $x = 2$ y $x = -3$. También para $m = -2{,}5$ y $n = \frac{1}{2}$, obtén el valor de f en los puntos $x = 2$ y $x = -3$.
e. Indica los puntos de corte de las funciones anteriores con los ejes con ayuda de la herramienta *"Intersección"*, esta herramienta la encontrarás en el menú → puntos → intersección.

Ejercicio 21. En GeoGebra realiza los siguientes pasos:

a. Dibuja la función $f(x) = x^2 - 9$, estudia su dominio y recorrido, puntos de corte (puedes hacer uso de la herramienta *"Intersección"* para ayudarte) e intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, y simetrías.
b. Abre el archivo *"cuadraticas.ggb"* (Anexo B) proporcionado por el profesor, donde dispones de una función cuadrática de la forma $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

donde a, b y c son valores que varían según los deslizadores. Encontrarás un programa como el siguiente:



Mueve primero los deslizadores de a y c, manten $b = 0$, y observa cómo cambia la gráfica, ¿qué ocurre cuándo se tienen valores de a negativos?, ¿y cuándo c es negativo?

c. Ahora, mueve también el deslizador de b, ¿qué puedes observar?, ¿cómo cambia la gráfica según el signo de b?

d. Elige valores para a, b y c, donde $a < 0$ y estudia el carácter de la función (continuidad, puntos de corte, crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, y simetrías) con dichos valores.

Ejercicio 22. Patricia quiere cambiar la tarifa de su teléfono móvil y ha encontrado las siguientes ofertas en tres compañías distintas:

- Compañía 1: tiene una cuota mensual de 4€ y llamadas a 5 céntimos por minuto.
- Compañía 2: tiene llamadas ilimitadas y la cuota mensual es de 41,95€.
- Compañía 3: no tiene cuota fija mensual y las llamadas tienen un coste equivalente a 8 céntimos por minuto.

Con los datos ofrecidos por las compañías, en una hoja de cálculo realiza una pequeña tabla de valores para cada compañía y representa gráficamente las tres funciones en un mismo sistema de coordenadas. Observando la gráfica, responde las siguientes cuestiones:

a. ¿Cuál es la compañía que posee la tarifa más barata según las llamadas que Patricia pueda realizar mensualmente?

b. Si el mes pasado Patricia realizó llamadas por un tiempo de 2 horas y 40 minutos, ¿cuál habría sido la compañía más económica?

2. ¿Qué técnicas o modificaciones de una técnica se ejercitan con ellos?

Para los ejercicios del primer campo de problemas, **el concepto de función**, se trabajan las técnicas T1.1 y T1.2. con las que se trata de observar si realmente se representan funciones. Es decir, analizar si existe dependencia entre dos conjuntos y que a cada valor de la variable x le corresponda un solo valor de y o $f(x)$.

Para los ejercicios que se centran en las **relaciones entre los sistemas de representación** (CP2) se usan las siguientes técnicas. En el *Ejercicio 5* se trata de identificar las variables y la relación entre ellas, establecer una tabla de valores y una expresión algebraica. En el *Ejercicio 6* se trabaja la técnica de interpretar las variables del enunciado y tratar de realizar la gráfica apoyándose en una tabla de valores. En el *Ejercicio 7* se toman los puntos de coordenadas de las gráficas y se pasan a una tabla de valores. En el *Ejercicio 8* se trata de interpretar la relación entre las dos variables y asociar un enunciado y una forma algebraica a dicha gráfica. En el *Ejercicio 9* se ha de realizar una tabla de valores donde se calcule el valor de la función para determinados valores de x, y representarlo en un sistema de coordenadas. Para el siguiente ejercicio, *el 10*, se ha de trabajar con los datos extraídos de una tabla y representarlo en una gráfica, así como asociarlo a una ecuación.

Finalmente, para los ejercicios que se centran en las **características de las funciones**, se trata de que los alumnos trabajen con las características mediante el análisis de las gráficas, pero también mediante las expresiones algebraicas de las funciones. En los *Ejercicios 11* y *13* se trata de estudiar el dominio y recorrido de las funciones, y los puntos de corte respectivamente, donde se dan funciones de forma algebraica y gráfica. En el *Ejercicio 12* se ha de calcular la imagen de una función dados unos puntos concretos de la variable independiente. Los *Ejercicios 14, 15* y *16*, dadas las gráficas de distintas funciones, consisten en estudiar diferentes características. En el *Ejercicio 17* se usan las técnicas para verificar si la función cumple $f(x) = f(-x)$ o $-f(x) = f(-x)$ para estudiar la simetría de los casos que se dan analíticamente, y luego estudiar las simetrías para los casos que se dan gráficamente.

Los *Ejercicios 18* y *19* están enfocados en realizar un estudio de las funciones y, partiendo de las formas en que se ofrece la función, tendrán que usar una técnica u otra. Finalmente, los *Ejercicios 20, 21* y *22* están enfocados en estudiar las características de las funciones con ayuda de las TIC (Tecnología de la Información y la Comunicación) mediante *GeoGebra* y *hoja de cálculo*. Con los dos primeros problemas se trata de estudiar el comportamiento de las funciones lineales y cuadráticas, y con el último se pretende interpretar los datos del enunciado, establecer unas tablas de valores y representar gráficamente las tres funciones en un mismo sistema de ejes coordenados para realizar su comparación y responder a las cuestiones.

3. Dichas técnicas ¿están adecuadas al campo de problemas asociado al objeto matemático?

Se han visto los problemas contextualizados en la vida cotidiana para introducir los conceptos necesarios de las funciones. Luego, las técnicas utilizadas para resolver los ejercicios anteriores, según los campos de problemas a las que pertenecen, son adecuadas.

Estos ejercicios están pensados para practicar las técnicas y que así los alumnos asimilen los conceptos y características de las funciones. En el caso de los últimos ejercicios propuestos se requiere más reflexión, pero con ellos se pretende que los alumnos identifiquen los enunciados y asocien las técnicas usadas en los anteriores ejercicios para su resolución.

4. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula

Para trabajar los ejercicios anteriores se sigue el siguiente método. Se entregan fotocopias con todos los ejercicios a los alumnos. En clase se trabajarán el *Ejercicio 5 y 6* y los *Ejercicios del 11 al 17*. En los ejercicios *11*, *13* y *17* será suficiente con estudiar algunos de los apartados correspondientes a la expresión algebraica y algunos de la representación gráfica. Estos se trabajan de forma autónoma para observar que son capaces de identificar y asimilar las técnicas necesarias para su resolución, mientras el profesor pasa por las mesas para observar cómo los alumnos trabajan y ayudarles en caso de ser necesario. Una vez que hayan finalizado se procede a la resolución de estos ejercicios generando un debate entre los alumnos.

Para realizar los *Ejercicios 18* y *19*, se crean grupos de 2 o 3 alumnos, se trata de que sean capaces de analizar otro tipo de ejercicios y mediante un aprendizaje colaborativo sepan ayudarse entre ellos e identificar las técnicas usadas anteriormente y aplicarlas a estos dos ejercicios. El profesor hará el mismo papel que en el caso anterior y al finalizar se procederá a su corrección mediante un debate en el aula.

En el aula de informática mediante parejas se realizan los ejercicios prácticos, *Ejercicios 20, 21* y *22*, con los programas *GeoGebra* y con *hoja de cálculo* con la finalidad de familiarizar a los alumnos con el estudio de las funciones en estos programas. Como anteriormente, el profesor realiza el mismo papel, y una vez que todas las parejas hayan finalizado se procede a la corrección mediante un debate.

Finalmente, el resto de ejercicios que no se han trabajado en el aula se mandan como deberes para observar que los alumnos han adquirido el concepto de función, saben trabajar los sistemas de representación y sus características, así como sus técnicas.

G. Sobre las tecnologías (justificación de las técnicas)

1. ¿Mediante qué razonamientos se van a justificar las técnicas?

Las tecnologías que justifican las técnicas usadas durante la unidad didáctica se justifican mediante las definiciones propias de cada concepto, y en algunos casos por la gráfica de la función.

Por tanto para justificar las técnicas que se trabajan en el campo de problemas de **concepto de una función** se usa la definición de función: "Una función es una relación entre dos magnitudes o variables numéricas, x e y, de forma que a cada valor de x (variable independiente) le corresponde un único valor de y (variable dependiente)" (De la Prida Almansa, C., Gaztelu Villoria, A.M., González García, A., Machín Polaina, P., Pérez Saavedra, C. y Sánchez Figueroa, D., 2015, pág. 222).

Las tecnologías que se usan en el campo de problemas de las **relaciones entre los distintos sistemas de representación de una función** se justifican mediante las definiciones de las cuatro formas de representar una función. En particular, se puede dar la relación entre dos variables de una función mediante un enunciado y mediante una expresión algebraica de la forma $y = f(x)$ con la que se hace referencia a la ecuación de una función. También se dan las variables x e y mediante pares de valores (x, y) que se recogen en una tabla, y finalmente mediante una representación gráfica en la que los pares de valores (x, y) indican los puntos del plano en un sistema de coordenadas cartesianas, donde la variable x se dibuja en el eje de abscisas y la variable y en el de ordenadas (De la Prida Almansa, et al., 2015, pág. 224).

Por último, las tecnologías usadas para justificar las técnicas empleadas en el campo de problemas correspondiente a estudiar las **características de las funciones** son las definiciones de sus propiedades:

- El dominio de una función $f(x)$ es el conjunto de todos los valores que puede tomar la variable x (variable independiente), y se escribe $Dom\ f$.
- El recorrido o imagen de una función $f(x)$ es el conjunto de todos los valores que toma la variable y (variable dependiente), y se escribe $Im\ f$.
- Una función es continua si no presenta discontinuidad de ningún tipo en su dominio de definición. Es decir, se dice que una función es continua si se puede dibujar su gráfica con un solo trazo.
- Se dice que una función presenta un punto de discontinuidad si en la gráfica de la función existe algún punto (salto) en el que se interrumpe.
- La imagen de un punto x_0 se tiene al evaluar dicho punto en la función, es decir, se corresponde con $f(x_0)$.
- Dada la gráfica de una función, si un punto (x, y) pertenece a la gráfica se dice que y es la imagen de x y que x es la antiimagen de y.
- Los puntos de corte de una función con los ejes son los puntos de intersección de la gráfica con ambos ejes de coordenadas.
    - Corte en el Eje X, es de la forma $(x_0, 0)$ donde x_0 se tiene al resolver $f(x) = 0$.
    - Corte con el Eje Y, es de la forma $(0, y_0)$ donde y_0 se halla calculando $f(0)$.
- Dada una función y los valores $x = a$ y $x = b$, tal que $a < b$ siendo números muy próximos entre sí:
    - Si $f(b) < f(a)$, la función decrece entre a y b. Es decir, al aumentar el valor de x disminuye el valor de y.
    - Si $f(b) > f(a)$, la función crece entre a y b. Es decir, al aumentar el valor de x aumenta el valor de y.
    - Si $f(b) = f(a)$, la función es constante entre a y b. Es decir, al aumentar el valor de x el valor de y se mantiene igual.
- Una función continua tiene un máximo relativo en un punto x_0 cuando pasa de ser creciente a ser decreciente en dicho punto. Igualmente, una función continua tiene un mínimo relativo en x_0 si la función pasa de decreciente a creciente en ese punto.

- Una función tiene un máximo absoluto si existe un punto de la gráfica con el máximo valor de todo su dominio. Igualmente, se tiene un mínimo absoluto si existe un punto con el menor valor en su dominio.
- Una función es periódica si su gráfica se repite cada cierto intervalo. Es decir, si T es el valor del período, se cumple: $f(x) = f(x+T) = f(x+2T) = \cdots$
- Una función es simétrica respecto el eje de ordenadas (función par) si se cumple $f(x) = f(-x)$, y una función es simétrica respecto del origen de coordenadas (función impar) si se cumple $f(-x) = -f(x)$.
- Una función tiende a un valor cuando la variable dependiente se aproxima a ese mismo valor mientras que la variable independiente (x) aumenta o disminuye.

2. ¿Quién (profesor, alumnos, nadie) va a asumir la responsabilidad de justificar las técnicas?

Las técnicas las justifica el profesor una vez que los alumnos han realizado los problemas propuestos en la Sección E, en los cuales generalmente trabajan mediante pequeños grupos y el profesor hace de "ayudante". Una vez que esos problemas han sido resueltos, se genera un debate mediante puesta en común de los alumnos y se observan y anotan las técnicas que han usado, para posteriormente institucionalizarlas.

3. Diseña el proceso de institucionalización de los distintos aspectos del objeto matemático e indica la metodología a seguir para su implementación en el aula

Para institucionalizar los contenidos de la unidad de funciones inicialmente se trabaja el *Problema 2 de razón de ser* para introducir la unidad y los *Problemas 1, 2 y 3* para introducir el concepto de función y proceder a la corrección de dichos problemas. Para ello se entrega a los alumnos una ficha con estos problemas y mediante grupos heterogéneos de 2 o 3 personas se trabajan sin instrucciones previas mientras el profesor hace de "ayudante". Una vez que los alumnos han finalizado se introduce formalmente la definición de función y mediante una puesta en común con los alumnos se corrigen los problemas anteriores. La finalidad de introducir antes de la corrección el concepto de función es que sean los propios alumnos los que identifiquen si al realizar estos problemas se han aproximado a este concepto.

Para institucionalizar las distintas formas de representación de una función se trabajan los *Problemas 4, 7, 8 y 9*. El profesor entrega estos problemas a cada uno de los alumnos, los dos primeros se realizan en papel y los dos siguientes en ordenador.

Además los alumnos pueden trabajar en grupos heterogéneos de 2 o 3 personas, y preferiblemente en parejas para realizar los problemas de ordenador. Por tanto, una vez finalicen estos problemas se procede a su corrección mediante una puesta en común en la que expliquen las técnicas empleadas y posteriormente el docente las institucionaliza.

Finalmente, para estudiar las características de una función se realiza el *Problema 1 de razón de ser* y los *Problemas 10 y 11*, el docente entrega una fotocopia con los problemas a cada alumno y se procederá a su resolución mediante la intervención de los alumnos. Es decir, anotan sus respuestas en el papel correspondiente, y se comentan las soluciones de cada apartado entre toda la clase, mientras tanto el profesor anota las respuestas correctas, así como las incorrectas para posteriormente comentar estos aspectos e institucionalizar las técnicas que estudian las características de las funciones.

H. Sobre la secuencia didáctica y su cronograma

1. Indica la secuenciación de las actividades propuestas en los apartados anteriores

En la siguiente tabla se muestra la secuenciación establecida para impartir esta unidad en 3º ESO en la que se muestra el contenido y las actividades de las once sesiones.

Sesión	Contenidos	Actividades
1	Control inicial de los conocimientos del alumnado.	Actividades 1 a 3, y corrección mediante puesta común de 1 y 2.
2	Presentación de la razón de ser de funciones, problemas del concepto de función e institucionalización.	Problema 2 de razón de ser y debate para su corrección. Problemas 1, 2 y 3 del campo de problemas de concepto de función y puesta en común. Deberes: Ejercicios 1 a 4.
3	Repaso del concepto de función e introducción de las distintas formas de representación mediante los problemas.	Ejercicio 5 y puesta común. Problemas 4, 7, 8 y 9, corrección con puesta común. Ejercicio 6 y puesta en común.

		Deberes: Ejercicios 7, 8, 9 y 10.
4	Repaso del concepto de función y las formas de representación. Introducción a las características de funciones mediante problema de razón de ser.	Corrección de los deberes de las sesiones 2 y 3. Problema 1 de razón de ser y puesta en común.
5	Dominio y recorrido, puntos de corte y continuidad de una función.	Problema 10 y puesta común. Ejercicios 11 apartado a y d, 12, 13 apartado a y e, ejercicio 14, y debate. Deberes: Ejercicios 11 apartado b y f, 13 apartado c, d y f.
6	Crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos de una función, y período.	Corrección deberes. Problema 11 y puesta común. Ejercicios 15 y 16.
7	Simetrías de una función y repaso de características.	Ejercicio 17 apartado a, c y d, y puesta común. Ejercicios 18, 19 y 22. Deberes: Ejercicio 17 apartados b y e. Ejercicio 11 c y e, y 13 b y g para repasar.
8	Repaso de la unidad y trabajo de las técnicas.	Corrección de los deberes. Ejercicios 20 y 21 para repasar y debate para corregirlos.
9	Repaso de la unidad y dudas.	Problemas 5 y 6 para repasar. Resolución de dudas de la unidad.
10	Examen de la unidad.	Actividades de examen.
11	Corrección de la prueba de la unidad y entrega de los resultados.	Entrega de los exámenes y notas a los alumnos, y corrección de las actividades mediante puesta en común y pizarra.

2. Establece una duración temporal aproximada

Las once sesiones anteriores se llevan a cabo en clases de 50 minutos, en concreto, en el tercer curso de secundaria se dan 3 clases a la semana de esta materia, por lo que la unidad se imparte durante unas 4 semanas. Aunque cabe destacar que si surgen imprevistos podría modificarse ligeramente la temporalización anterior y ajustarse a las circunstancias.

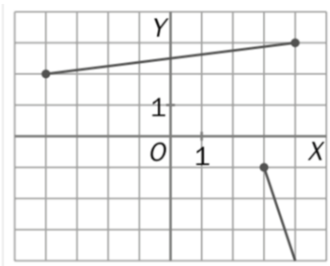
I. Sobre la evaluación

1. Diseña una prueba escrita que evalúe el aprendizaje realizado por los alumnos

A continuación se presenta la prueba escrita que se realizaría en la penúltima sesión con una duración de 50 minutos y con la que se evalúan los conocimientos adquiridos con esta unidad, donde los problemas que se recogen van en la misma línea que los presentados en esta memoria. Además, la puntuación total del examen es sobre 10 y junto cada problema se adjunta la puntuación que se otorga a cada actividad.

1. **Observa los siguientes apartados y trata de identificar si se corresponden con una función. Para los apartados que representen una función trata de obtener su expresión algebraica.** ***(1,5 puntos)***

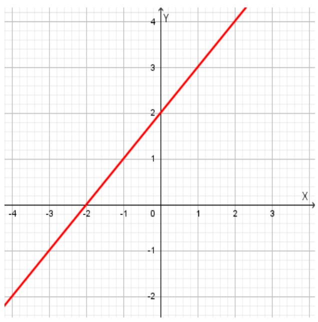
a.



(0,5pt)

b. El precio total de comprar naranjas si el precio de cada kilo es de 2,45€. *(0,5pt)*

c.



(0,5pt)

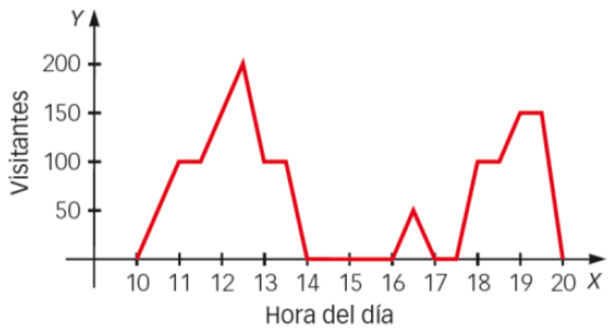
2. **Observa la siguiente tabla de valores donde se representa la altitud, en metros, y el tiempo, en horas.** ***(1,5 puntos)***

$tiempo\ (h)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$altitud\ (m)$	690	880	975	1125	1125	940	1035	890	700

a. Realiza un enunciado que se ajuste a los datos de la tabla de valores anterior. *(0,75pt)*

b. Dibuja el eje de coordenadas con sus correspondientes variables en los ejes y representa la gráfica que refleje la situación anterior. Determina los intervalos en los que la función es creciente, constante y decreciente. ¿Qué significa en el enunciado que has propuesto que la función sea creciente, constante o decreciente? *(0,75pt)*

3. La siguiente gráfica muestra el número de visitantes recogido en un día concreto de fin de semana en el Palacio de la Aljafería de Zaragoza.



Observa detenidamente la gráfica y responde a las siguientes preguntas.

(2,5 puntos)

a. ¿Durante qué intervalo de tiempo está abierto el Palacio? ¿Con qué característica de una función se corresponde ese intervalo? *<u>Nota</u>: entre las 14h y 16h y las 17h-17:30h el palacio permanece abierto aunque no reciba visitantes.* *(0,5pt)*

b. Escribe el intervalo correspondiente al número de visitantes que se han recibido en el día, ¿con qué característica de una función se corresponde? *(0,25pt)*

c. ¿Cuál es el máximo número de visitantes que se encuentran en la Aljafería y a qué hora se produce? Además, ¿con qué se corresponde está característica de la función? *(0,5pt)*

d. ¿En qué intervalo de tiempo hay 0 visitantes en el Palacio? *(0,25pt)*

e. ¿Cuántos visitantes hay a las $13h$? ¿Y a las $19h$? *(0,5pt)*

f. Escribe los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. ¿Qué significa que esos intervalos sean crecientes o decrecientes? *(0,5pt)*

4. **David tiene que desplazarse de Zaragoza a otra localidad, pero su vehículo está estropeado. Ha estado comparando el alquiler de distintos medios de transporte a lo largo de un día y los datos que ha recabado son los siguientes:**

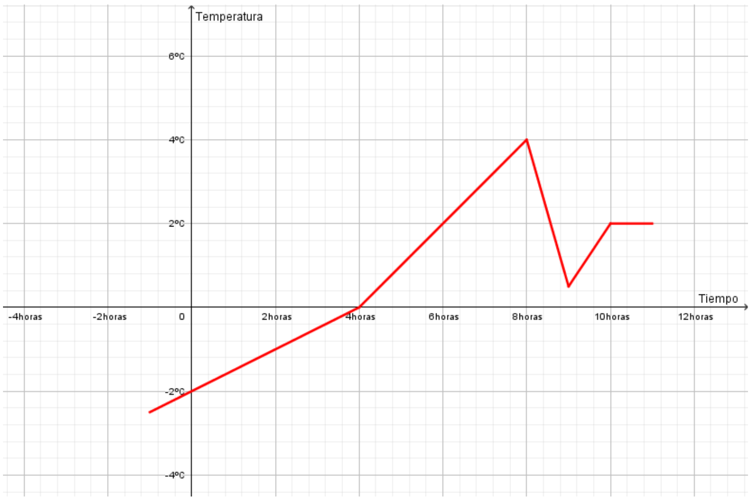
- **Si viaja en moto, ha de pagar por el trámite $190€$ más el alquiler de la moto equivalente a $30€$ a la hora.**
- **Si viaja en coche, ha de pagar por el trámite $135€$ más el alquiler equivalente a $45€/h$ desde que lo contrate.**
- **Si viaja en furgoneta, ha de pagar $55€$ por el trámite más un coste fijo de $385€$ durante ese día.**

Analiza todos los datos que David ha recogido y responde a las siguientes preguntas. ***(2,5 puntos)***

a. Define las variables que intervienen y obtén la expresión algebraica para cada uno de los medios de transporte que David ha analizado. *(0,75pt)*
b. Realiza una tabla de valores y dibuja en la misma gráfica las funciones que representan a cada uno de los vehículos. *(0,75pt)*
c. ¿Qué transporte es más económico si David lo alquila durante 9 horas? ¿Cuánto cuesta a las $9h$? *(0,5pt)*
d. Si solamente quiere alquilar el transporte durante 3 horas, ¿cuál le resulta más económico y cuál es su precio? ¿Y en caso de alquilarlo durante 6 horas? *(0,5pt)*

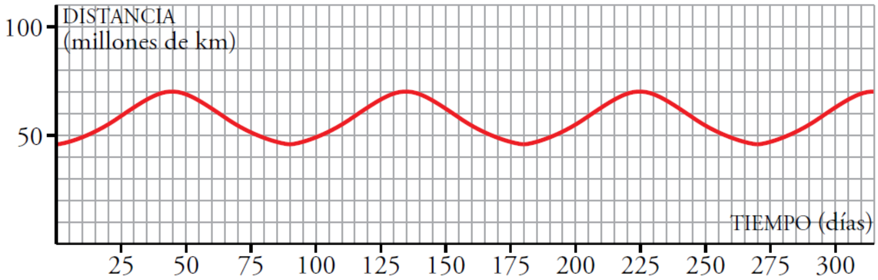
5. **Responde a los siguientes apartados:** ***(2 puntos)***

a. Observa la gráfica y propón un enunciado que se ajuste a dicha situación.
<u>Nota:</u> *los números negativos correspondientes al tiempo equivalen a las horas anteriores a las que se comienza a tomar la referencia desde 0. Es decir, se puede corresponder con las horas antes de las 0h de la madrugada, por ejemplo,* $-1 = 11$ *h de la noche.*



Después, analiza los puntos de corte de la función con el Eje X y Eje Y, e indica qué sucede en casa caso. *(1,25pt)*

b. La distancia al Sol del planeta Mercurio oscila entre 46 y 70 millones de kilómetros como se muestra en la gráfica. Observando la imagen averigua cuántos días tarda Mercurio en completar su órbita alrededor del Sol. Además, ¿con qué característica de las funciones se correspondería ese tiempo? *(0,75pt)*



2. ¿Qué aspectos del conocimiento de los alumnos sobre el objeto matemático pretendes evaluar con cada una de las preguntas de dicha prueba?

Según la Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, los criterios de evaluación del bloque de funciones que se presentan y se siguen para evaluar esta prueba son:

- ***Crit.MAAC.4.1.*** Conocer los elementos que intervienen en el estudio de las funciones y su representación gráfica. Además, los estándares de aprendizaje asociados a este criterio, son:
  - *Est.MAAC.4.1.1.* Interpreta el comportamiento de una función dada gráficamente y asocia enunciados de problemas contextualizados a gráficas.
  - *Est.MAAC.4.1.2.* Identifica las características más relevantes de una gráfica interpretándolas dentro de su contexto.

- *Est.MAAC.4.1.3.* Construye una gráfica a partir de un enunciado contextualizado describiendo el fenómeno expuesto.
- *Est.MAAC.4.1.4.* Asocia razonadamente expresiones analíticas a funciones dadas gráficamente.

- ***Crit.MAAC.4.2.*** Identificar relaciones de la vida cotidiana y de otras materias que pueden modelizarse mediante una función lineal valorando la utilidad de la descripción de este modelo y de sus parámetros para describir el fenómeno analizado. Los correspondientes estándares de aprendizaje asociados a este criterio, son:
  - *Est.MAAC.4.2.1.* Determina las diferentes formas de expresión de la ecuación de la recta a partir de una dada (Ecuación punto pendiente, general, explícita y por dos puntos), identifica puntos de corte y pendiente, y la representa gráficamente.
  - *Est.MAAC.4.2.2.* Obtiene la expresión analítica de la función lineal asociada a un enunciado y la representa.
  - *Est.MAAC.4.2.3.* Formula conjeturas sobre el comportamiento del fenómeno que representa una gráfica y su expresión algebraica.

Por tanto, teniendo en cuenta estos criterios y estándares, se presenta un análisis del conocimiento esperado de los alumnos, entre ellos se clasifican según los estándares de aprendizaje, campo de problemas, técnicas y tecnologías que se involucran.

En la **Actividad 1**, se trata de evaluar el **campo de problemas** CP1, concepto de función, y el CP2, relaciones entre sistemas de representación (paso de enunciado a ecuación y de gráfica o tabla de valores a expresión algebraica). Los **estándares de aprendizaje** que se usan para evaluar esta actividad son: Est.MAAC.4.1.1., Est.MAAC.4.1.4. y Est.MAAC.4.2.2.

Las **técnicas** que los alumnos pueden aplicar son:

- T1.1. Se establece una relación entre la variable dependiente (y) y la variable independiente (x), donde se estudia si a cada valor de x le corresponde un único valor de y.
- T1.2. Los puntos del plano en un sistema de coordenadas cartesiano se representan mediante los pares (x, y), de modo que para cada valor de x se tiene un único valor de y.

- T2.1. Identificar las variables dependiente e independiente del enunciado y pasarlas a su forma algebraica estableciendo la relación entre ambas.
- T2.7. Analizar los valores de la tabla y construir una ecuación que se ajuste a dichos valores mediante las variables x e y, es decir, realizar un ajuste numérico.
- T2.10. Relacionar la variable dependiente e independiente y asociarlo a su forma algebraica, es decir, realizar un ajuste gráfico para expresar su ecuación.

Así, las **tecnologías** asociadas a estas técnicas son la definición de función, así como de variable dependiente e independiente y sus formas de representación.

En la **Actividad 2,** se evalúan los **campos de problemas** CP2 y CP3, relaciones entre los sistemas de representación (paso de tabla a enunciado y gráfica), y características de funciones. Los **estándares de aprendizaje** son: Est.MAAC.4.1.1. y Est.MAAC.4.1.2.

Las **técnicas** que los alumnos pueden aplicar a son las siguientes:

- T2.5. Tomar los pares (x, y) de la tabla y sustituirlos correctamente en un sistema de coordenadas.
- T2.6. Analizar los valores de la tabla como pares (x, y) y asociar un enunciado que se ajuste a dichos valores, es decir, hacer una lectura de las relaciones numéricas.
- T3.9.1. Dado un intervalo (a, b) donde $a < b$ siendo números muy próximos entre sí, estudiar si $f(b) > f(a)$ y en este caso será una función creciente en ese intervalo.
- T3.9.2. Dado un intervalo (a, b) donde $a < b$ siendo números muy próximos entre sí, estudiar si $f(b) < f(a)$, entonces la función será decreciente en dicho intervalo.
- T3.9.3. Dado un intervalo (a, b) donde $a < b$, siendo números muy próximos entre sí, si $f(b) = f(a)$ la función es constante en ese intervalo.

Así, las **tecnologías** asociadas a estas técnicas son definición de variable dependiente e independiente, formas de representación de una función, gráfica y definición de crecimiento y decrecimiento.

Para la **Actividad 3**, el **campo de problemas** central es estudiar las características de las funciones y para ello los **estándares de aprendizaje** con los que se evalúa son: Est.MAAC.4.1.1. y Est.MAAC.4.1.2.

Luego, las **técnicas** que los alumnos pueden aplicar son:

- T1.2. Los puntos del plano en un sistema de coordenadas cartesiano se representan mediante los pares (x, y), de modo que para cada valor de x se tiene un único valor de y.
- T3.2.1. Hallar los valores de la variable independiente para los que se puede representar gráficamente la función.
- T3.2.2. Hallar los valores de la variable dependiente para los que se puede representar gráficamente la función.
- T3.5.1. Dada la gráfica de una función para obtener la imagen se observa el valor de y para un valor concreto de la variable independiente.
- T3.9.1. Dado un intervalo (a, b) donde $a < b$ siendo números muy próximos entre sí, estudiar si $f(b) > f(a)$ y en este caso será una función creciente en ese intervalo.
- T3.9.2. Dado un intervalo (a, b) donde $a < b$ siendo números muy próximos entre sí, estudiar si $f(b) < f(a)$, entonces la función será decreciente en dicho intervalo.
- T3.9.3. Dado un intervalo (a, b) donde $a < b$, siendo números muy próximos entre sí, si $f(b) = f(a)$ la función es constante en ese intervalo.
- T3.10.2. Se identifica como máximo y mínimo absoluto al punto en el que la función tiene el mayor o menor valor, respectivamente.

Así, las **tecnologías** asociadas a estas técnicas son la definición de función (así como variable dependiente e independiente), definición de dominio, recorrido, de máximo relativo y absoluto, e intervalos de crecimiento, decrecimiento y constantes de una función.

En la **Actividad 4**, se trabajan los **campos de problemas** de concepto de función, las relaciones entre los sistemas de representación y las características de las funciones. Luego, para evaluarla se siguen los siguientes **estándares de aprendizaje**: Est.MAAC.4.1.2., Est.MAAC.4.1.3. y Est.MAAC.4.2.2.

Las **técnicas** que los alumnos pueden aplicar son las siguientes:

- T1.1. Se establece una relación entre la variable dependiente (y) y la variable independiente (x), donde se estudia si a cada valor de x le corresponde un único valor de y.
- T2.1. Identificar las variables dependiente e independiente del enunciado y pasarlas a su forma algebraica estableciendo la relación entre ambas.

- T2.5. Tomar los pares (x, y) de la tabla y sustituirlos correctamente en un sistema de coordenadas.
- T2.7. Analizar los valores de la tabla y construir una ecuación que se ajuste a dichos valores mediante las variables x e y, es decir, realizar un ajuste numérico.
- T2.13. Dada la expresión algebraica, se realiza una tabla con las variables dependiente e independiente, y se obtiene el valor de y calculando la imagen de x en valores concretos.
- T3.4. Sustituir un valor en el lugar que ocupa la variable independiente y obtener el valor de la imagen.
- Observar las funciones y determinar en qué intervalos se tiene que una función es mayor que otra observando la gráfica y los cortes entre dichas funciones.

Así, las **tecnologías** que justifican estas técnicas son la definición de función, las correspondientes a las formas de representación de una función, imagen de un punto y la observación de la gráfica para analizar los dos últimos apartados de la actividad.

Finalmente, para la **Actividad 5** los **campos de problemas** que se trabajan son el concepto de función, las relaciones entre los sistemas de representación, y las características de las funciones. Para evaluarla se hace uso de los **estándares de aprendizaje**: Est.MAAC.4.1.1., Est.MAAC.4.1.2. y Est.MAAC.4.2.3.

Las **técnicas** que los alumnos pueden aplicar son:

- T1.2. Los puntos del plano en un sistema de coordenadas cartesiano se representan mediante los pares (x, y), de modo que para cada valor de x se tiene un único valor de y.
- T2.8. Relacionar las variables dependiente e independiente y asociarles un enunciado en el que se verifiquen los valores de la gráfica, es decir, hacer una lectura de las relaciones que se observan en la gráfica.
- T3.8.1. Hallar el corte con el eje de abscisas mediante la identificación de los puntos de intersección de la gráfica de la función y el eje X.
- T3.8.2. Para los cortes con el eje de ordenadas, se han de identificar los puntos de intersección de la gráfica de la función con el eje Y.
- T3.11. Observar si la gráfica de una función se repite en intervalos de la misma longitud.

Así, las **tecnologías** asociadas a estas técnicas son la definición de función, la representación gráfica de una función, puntos de corte dada la gráfica de una función y la definición de periodicidad de una función.

3. ¿Qué respuestas esperas en cada una de las preguntas en función del conocimiento de los alumnos?

A continuación se muestran una serie de posibles respuestas esperadas para cada una de las actividades, así como los errores. Cabe destacar que la resolución de todas las actividades del examen se pueden observar en el Anexo C.

Para la **Actividad 1**, los métodos para resolverlo **correctamente** serían:

1. Identificar y reconocer la variable dependiente e independiente de la función.
2. Buscar la relación, si existe, entre la variable dependiente e independiente. Es decir, analizar el concepto de función (para cada valor de x se tiene único valor de y).
3. Obtener las expresiones algebraicas directamente o realizar tabla de valores para el apartado b y c con el fin de hallar la expresión algebraica que los representan. En el caso del apartado b obtener una tabla de valores a partir del anunciado, y en el caso de c obtener la tabla de valores a partir de la gráfica.

Por otro lado, los **posibles errores** de los alumnos son:

1. Confundir la variable dependiente y la variable independiente, o no identificarlas mediante el enunciado de b.
2. No identificar el concepto de función, es decir, no establecer relación entre x e y.
3. Errores aritméticos al obtener las expresiones algebraicas y tablas de valores. Así como errores al tomar puntos de las gráficas para obtener las tablas.
4. No justificar las soluciones o justificarlas erróneamente.

Para la **Actividad 2**, las **estrategias correctas** esperadas son:

1. Inventar un enunciado que se ajuste a los datos que se expresan en la tabla de valores. Es decir, se ha de realizar un cambio de representación desde una tabla de valores a un enunciado de forma verbal. Particularmente, se trata de expresar el comportamiento que se da en la tabla, cómo la función crece o decrece en algunos casos más rápido que en otros, y en otros tramos es constante.
2. Reconocer la variable dependiente e independiente.

3. Dibujar un sistema de coordenadas y asociar las variables correspondientes para representar la gráfica, ya sea a partir de la tabla o del enunciado inventado en a.
4. Para estudiar los intervalos donde cambia la función se puede proceder observando la gráfica o la tabla de valores. De este modo, crecerá si al aumentar la variable x la variable y también aumenta, se tendrán intervalos constantes en los casos en que al aumentar x la y se mantiene igual, e intervalos decrecientes si al aumentar x la variable y disminuye. Finalmente, se expresará el significado de estos intervalos en el contexto del enunciado inventado en a.

En cuanto a los **posibles errores** de los alumnos son:

1. Proponer un enunciado que no se ajuste a los datos mostrados en la tabla de valores o no se ajuste a las magnitudes que se expresan. Así como seleccionar erróneamente las variables dependiente e independiente.
2. Dibujar mal el sistema de coordenadas y/o colocar mal las variables en los ejes.
3. Representar mal los puntos en el sistema de ejes coordenados, o consecuentemente, dibujar una gráfica que no se ajuste a la tabla de valores dada en el ejercicio.
4. Cometer errores al escribir los intervalos, es decir, incluir o no los extremos de los intervalos, cambiar el orden de las coordenadas, o dar intervalos que no se corresponden con lo que se pregunta.
5. Dar los tramos constantes, de crecimiento y decrecimiento como puntos de x en lugar de ofrecerlos como intervalos.
6. Dividir en subintervalos los intervalos continuos donde la función crece o decrece.
7. No justificar las soluciones o justificarlas erróneamente.

Para la **Actividad 3**, se espera que los alumnos procedan **correctamente** observando la gráfica del siguiente modo:

1. Obtener el intervalo de tiempo en el que el palacio de la Aljafería permanece abierto e identificar este hecho con el dominio de la función.
2. Identificar el recorrido como los visitantes que hay y dar su intervalo de definición.
3. Obtener el máximo de la función, por tanto, se ha de identificar el número máximo de visitantes que se encuentran en un determinado momento dentro de la Aljafería y expresar la hora con la que se corresponde.
4. Obtener el intervalo en el que se tiene una afluencia de 0 visitantes, es decir, es un período en el que la Aljafería permanece abierta pero no recibe visitas.

5. Hallar la imagen de un punto, obtener el número de visitantes a las 13 y $19h$.
6. Observar la gráfica dada por el enunciado y extraer los intervalos donde la función es creciente y decreciente, de modo similar al detallado en la actividad anterior. Además, responder qué significa que estos intervalos sean así.

Los **errores previsibles** que podrían encontrarse en esta actividad son:

1. No identificar el dominio de la función u obtenerlo de forma errónea, así como no asociar el dominio al horario en que la Aljafería permanece abierta.
2. No hallar el recorrido de la función y/o no asociarlo con el número de visitantes.
3. Cometer errores al escribir los intervalos, es decir, incluir o no los extremos de los intervalos, cambiar el orden de las coordenadas, o dar intervalos que no se corresponden con lo que se pregunta.
4. No reconocer el máximo de la función, donde se tiene mayor afluencia de visitantes o dar dicho punto como un solo valor de x y no con coordenadas (x, y). Igualmente, no identificar correctamente la hora en que se tiene el máximo.
5. Expresar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función como puntos de x, y no interpretar su significado.
6. Dividir en subintervalos los intervalos continuos en que la función crece o decrece.
7. Dar erróneamente la imagen de un punto.
8. No justificar las soluciones o justificarlas erróneamente.

Para la **<u>Actividad 4</u>**, las **estrategias correctas** para resolverla son las siguientes:

1. Identificar las variables dependiente e independiente que se expresan en el enunciado y obtener la expresión algebraica para cada medio de transporte.
2. En lugar de realizar el paso anterior, los alumnos pueden realizar una tabla de valores y la gráfica para cada transporte para extraer a partir de ahí la expresión algebraica (con lo que resolverían simultáneamente los apartados a y b).
3. En caso de seguir la estrategia de 1, se hace una tabla de valores a partir del enunciado o de la expresión algebraica obtenida para cada medio de transporte.
4. Para realizar la gráfica, han de dibujar el eje de abscisas y ordenadas y asociarles las variables correspondientes para después representar las tres funciones anteriores a partir de la tabla de valores o de la expresión algebraica obtenida.
5. Para responder a las siguientes preguntas, se ha de estudiar el comportamiento y los puntos de corte entre las funciones representadas en la gráfica. Para ello, en el

primer caso ha de identificarse que para un alquiler de 9 horas, el mejor medio de transporte es la furgoneta. Posteriormente, observar la gráfica para tener el precio de la furgoneta a las $9h$, o evaluar $x = 9$ en las ecuaciones de los medios de transporte y compararlas para obtener la de menor precio.

6. Como en el caso anterior, se ha de identificar el comportamiento de las funciones. En concreto, se ha de observar que para un alquiler de $3h$ sale más rentable alquilar la moto, y para un alquiler de $6h$ es más económico el coche.
7. Otra estrategia para proceder en los apartados c y d de la actividad, en lugar de realizar los pasos 5 y 6, sería sustituir el valor por el que nos preguntan en el enunciado en cada una de las expresiones algebraicas obtenidas, y comparar estos valores para ver cuáles son los casos que resultan más económicos.

Los **posibles errores** de los alumnos son:

1. No identificar las variables dependiente e independiente, así como no relacionarlas correctamente para dar su ecuación (ya sea directamente o mediante tabla).
2. Errores en cálculos a la hora de hacer las tablas de valores para cada función.
3. Cometer fallos al graduar el sistema de ejes coordenados y colocar erróneamente los puntos de la tabla en el sistema de ejes coordenados, y consecuentemente, hallar mal la gráfica.
4. No usar adecuadamente las unidades, y no justificar las soluciones o hacerlo mal.

Para resolver **correctamente** la <u>**Actividad 5**</u>, las estrategias son las siguientes:

1. Para el apartado a, identificar la variable dependiente, la temperatura (en $^{\underline{o}}C$), y la variable independiente, el tiempo (en horas).
2. Para el apartado a, según la función que se muestra, establecer un enunciado que se ajuste a dicha gráfica.
3. En a, observando la gráfica, identificar los puntos de corte con los ejes e interpretar qué ocurre en cada caso, y qué significan esos cortes en el contexto de su enunciado.
4. Para el apartado b, se trata de identificar la variable dependiente e independiente en los ejes coordenados.
5. Para b, observando las oscilaciones de la función, analizar cada cuántos días se repite la función. Es decir, si se comienza a observar el eje Y, analizar cuál es el intervalo más corto donde la gráfica de la función se repite.

6. En b, análogo a lo anterior, observar cuándo la y alcanza los valores máximos y analizar cuál es el intervalo más corto donde la gráfica de la función se repite.
7. Finalmente para b, identificar que como la función se repite cada un intervalo de 88 días, esta característica se corresponde con el período de una función.

Por otro lado, los **posibles errores** entre los alumnos son:

1. En a, proponer un enunciado que no se ajuste a la función representada en la gráfica, o que no se corresponda con las magnitudes que se definen. Así como no identificar la variable dependiente e independiente en ninguno de los dos apartados.
2. Dar los puntos de corte de la función de forma errónea.
3. No asociar el corte con el eje Y a las $0h$, y no asociar el corte de la función con el eje X a cuando se tienen $0ºC$.
4. En b confundir el período con la distancia en que oscila Mercurio alrededor del Sol.
5. No identificar cada cuántos días Mercurio completa la órbita alrededor del Sol. O identificarlo, pero no asociarlo al período.
6. No justificar los pasos o hacerlo de forma errónea.

4. ¿Qué criterios de calificación vas a emplear?

Para evaluar las actividades se va seguir el **modelo de tercios,** un modelo de penalización por errores visto en la asignatura Innovación e investigación educativa en Matemáticas (Martínez Juste, S. y Muñoz Escolano, J.M., 2020).

En este modelo se diferencian tres tipos de tareas, las tareas principales que forman el objetivo principal de la calificación por lo que se pueden penalizar hasta con un 100% de la actividad, y las tareas auxiliares que forman parte del objeto con el que llegar a la solución. Además, estas tareas auxiliares se clasifican en específicas y generales. Las específicas implican contenidos específicos para evaluar por lo que se pueden penalizar hasta con dos tercios de la calificación, y las generales, que no implican estos contenidos, se pueden penalizar con hasta un tercio de la actividad.

Por tanto, para cada actividad de la prueba se adjunta una guía de corrección en la que se tienen en cuenta las tareas citadas anteriormente. Además, en el Anexo D puede consultarse una clasificación detallada de estas tareas para cada una de las actividades. Luego, la penalización por errores de cada actividad será la siguiente.

Actividad 1.

- No asociar el concepto de función con cada una de las gráficas, hasta $-0{,}5$ en cada apartado (Tarea Principal).
- Identificar la función, pero cometer errores al obtener la expresión algebraica, hasta $-0{,}335$ por apartado (Tarea Auxiliar Específica).
- Errores aritméticos en la obtención de datos para las expresiones algebraicas o tablas de valores, hasta $-0{,}05$ por apartado (Tarea Auxiliar General).
- Errores por uso de mala notación, hasta $-0{,}05$ por apartado (Tarea Auxiliar General).
- Errores en explicaciones o no realizarlas, hasta $-0{,}1$ (Tarea Auxiliar General).

Actividad 2.

- No realizar un enunciado o en su caso realizarlo cometiendo errores de modo que no se ajuste a lo expresado en la tabla de valores o no hacer uso de las magnitudes que se dan en la tabla, hasta $-0{,}75$ puntos (Tarea Principal).
- Hacer una gráfica que no se ajuste al enunciado o tabla de valores, o no realizar la gráfica. Asimismo, realizar la gráfica pero en alguno de sus tramos no se ajusta a los datos dados, hasta $-0{,}75$ puntos (Tarea Principal).
- Representar las variables cambiadas en los ejes, hasta $-0{,}35$ puntos (Tarea Auxiliar Específica).
- Graduar erróneamente el sistema de ejes coordenados para realizar la gráfica, hasta $-0{,}2$ puntos (Tarea Auxiliar Específica).
- Dar intervalos de crecimiento o decrecimiento erróneos, no darlos o no contestar qué significan en su enunciado, hasta $-0{,}375$ puntos (Tarea Principal).
- Uso de mala notación, hasta $-0{,}1$ por apartado (Tarea Auxiliar General).
- Errores en explicaciones o no realizarlas, hasta $-0{,}1$ (Tarea Auxiliar General).

Actividad 3.

- No identificar el dominio, no asociarlo al horario de apertura de la Aljafería o hallarlo pero cometer errores numéricos, hasta $-0{,}5$ puntos (Tarea Principal).
- No identificar el número de visitantes con el recorrido de la función, no hallarlo o hallarlo con valores erróneos, hasta $-\ 0{,}25$ puntos (Tarea Principal).
- No identificar el máximo de la función, luego no obtener el máximo número de visitantes que se encuentran en la Aljafería o no responder, así como no identificar la hora a la que se corresponde este máximo, hasta $-0{,}5$ puntos (Tarea Principal).

- No traducir la hora a la que da el máximo, hasta $-0{,}15$ (Tarea Auxiliar General).
- No responder al intervalo de tiempo en el que se tienen 0 visitantes, o dar valores que no se corresponden, hasta $-0{,}25$ puntos (Tarea Principal).
- Dar un número de visitantes en la Aljafería erróneo para las $13h$, hasta $-0{,}25$ puntos. Análogamente, para las $19h$ (Tarea Principal).
- No identificar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función, o hacerlo con valores alejados de la realidad, hasta $-\ 0{,}5$ puntos (Tarea Principal).
- Expresar los intervalos que se piden en distintos apartados con las coordenadas en orden opuesto, hasta $-0{,}15$ puntos en cada apartado (Tarea Auxiliar Específica).
- Confusión en incluir o excluir puntos del dominio y recorrido, hasta $-0{,}10$ puntos por apartado (Tarea Auxiliar Específica).
- No expresar los intervalos como tal, sino que se hace una representación de palabra desde un punto de x hasta otro, por ejemplo, crece de 10 a 11, hasta $-0{,}05$ puntos por apartado.
- Errores en explicaciones o no realizarlas, hasta $-0{,}1$ (Tarea Auxiliar General).

Actividad 4.

- Dar la expresión algebraica errónea, de modo que no se ajusta a lo que se explica en el enunciado, $-0{,}25$ puntos por función a definir (Tarea Principal).
- Dar una expresión algebraica con algún pequeño fallo de modo que sea similar a la solución del problema, hasta $-0{,}10$ puntos por función.
- Hacer una tabla de valores que no se ajuste con su función o no hacerla, $-0{,}10$ por cada función (Tarea Principal).
- No representar ninguna de las gráficas que se piden, o representar algunas y otras no. Igualmente, en caso de representarlas sin que se correspondan con su expresión algebraica, $-0{,}15$ por cada función. De modo que si no se representa ninguna función se tendría $-0{,}45$ puntos (Tarea Principal).
- Cometer errores leves al presentar la tabla de valores (fallos aritméticos) o la gráfica de algunas funciones, hasta $-0{,}05$ por función (Tarea Auxiliar General).
- Graduar erróneamente el sistema de ejes coordenados para realizar la gráfica, hasta $-0{,}15$ puntos (Tarea Auxiliar Específica).
- No representar las 3 funciones en el mismo sistema de ejes coordenados, como indica el enunciado, hasta $-0{,}15$ puntos.

- Representar las variables cambiadas en los ejes, hasta $-0{,}10$ puntos (Tarea Auxiliar Específica).
- No responder cuál es el trasporte más económico si se alquila durante $9h$ o hacerlo de forma errónea, $-0{,}25$ puntos. Análogamente, si no se expresa cuánto dinero cuesta tenerlo alquilado durante $9h$, hasta $-0{,}25$ puntos (Tarea Principal).
- Análogo a los casos anteriores, si no se identifica el transporte más económico a las $3h$ y $6h$ de alquiler, $-0{,}125$ puntos por pregunta. Igualmente, con el precio al que se correspondería, hasta $-0{,}125$ puntos por pregunta (Tarea Principal).
- Errores por uso de mala notación, hasta $-0{,}1$ (Tarea Auxiliar General).
- Errores en explicaciones o no realizarlas, hasta $-0{,}1$ (Tarea Auxiliar General).

Actividad 5.

- Realizar un enunciado que no se ajuste a lo expresado en la gráfica, en su caso realizarlo pero en algunos casos no se ajusta a lo que se muestra en dicha gráfica, hasta $-0{,}625$ puntos (Tarea Principal).
- Expresar un enunciado en el que no se usan las magnitudes que se dan en la gráfica, hasta $-0{,}10$ puntos.
- No dar los puntos de corte o darlos erróneamente y no justificar que representan, hasta $-0{,}625$ puntos (Tarea Principal).
- Dar los puntos de corte como coordenadas con los valores cambiados o como un solo valor para la variable x, hasta $-0{,}2$ puntos (Tarea Auxiliar Específica).
- No identificar que el corte con el eje Y se corresponde con las $0h$, y que el del eje X se corresponde a tener $0ºC$, hasta $-0{,}10$ puntos (Tarea Auxiliar Específica).
- En b, no identificar que la función se repite cada cierto intervalo de tiempo, hasta $-0{,}75$ puntos (Tarea Principal).
- No asociar el intervalo en el que se repite la función con el período, hasta $-0{,}2$ puntos (Tarea Principal).
- Confundir los valores que toma la variable dependiente con los que toma la variable independiente, hasta $-0{,}2$ puntos (Tarea Auxiliar Específica).
- No usar la unidad de medida para la variable que define el tiempo, hasta $-0{,}05$ puntos (Tarea Auxiliar General).
- Errores en explicaciones o no realizarlas, hasta $-0{,}1$ (Tarea Auxiliar General).
- Uso de notación errónea, hasta $-0{,}1$ puntos (Tarea Auxiliar General).

J. Bibliografía y páginas web revisadas para la realización del trabajo

Aína Martínez, J.M., Alonso Borrego, J.L., Cabezón Ochoa, M.A., Fernández Rubio, J.I., García Cebrían, M.J., Herrero Izquierdo, J. y Ruíz Gil, C. (2009). *Matemáticas 3º ESO.* CIDEAD. Recuperado de http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/3esomatematicas/index.htm

Alayo, F. (1990). *El lenguaje de funciones y gráficas.* Bilbao: Servicio Editorial Universidad del País Vasco.

Arce, M., Conejo, L. y Muñoz-Escolano, J.M. (2019). Evaluación en Matemáticas. *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas en Educación Secundaria*, 221-246.

Colera Jiménez, J., Gaztelu Albero, I., Oliveira González, M.J. y Colera Cañas, R. (2015). *ESO 3 Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas.* Madrid: Anaya.

De la Prida Almansa, C., Gaztelu Villoria, A.M., González García, A., Machín Polaina, P., Pérez Saavedra, C. y Sánchez Figueroa, D. (2015). *Matemáticas Enseñanzas académicas 3º ESO. Serie resuelve.* Madrid: Santillana.

Deulofeu, J. (2001). Las funciones en la educación secundaria: ¿para qué?, ¿cómo? Aportaciones de la investigación. *Actas de las X Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas (JAEM)*, (págs. 367-377). Zaragoza.

Díaz Gómez, J. (2013). El concepto de Función: Ideas pedagógicas de su historia e investigaciones. *El Cálculo y su Enseñanza, 4*, 13-25.

Gairín, J.M., Muñoz, J.M. y Oller, A.M. (2012). Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M.C. Penalva, F.J. García y L. Ordóñez (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XVI*, 261-274.

Martínez Juste, S. y Muñoz Escolano, J.M. (2019). *Evaluación en Matemáticas.* [Apuntes académicos] Moodle UNIZAR.

Martínez Juste, S. y Muñoz Escolano, J.M. (2020). *Investigación en calificación.* [Apuntes académicos] Moodle UNIZAR.

Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón. (2 de Junio de 2016). *Boletín Oficial de Aragón*, págs. 12640-13458.

Ortega, T. y Pecharromán, C. (2014). Errores en el aprendizaje de las propiedades globales de las funciones. *Revista de Investigación en Educación, 12*(2), 209-221.

Sastre Vázquez, P., Rey, G. y Boubée, G. (2008). El concepto de función a través de la Historia. *UNIÓN Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 16*, 141-155.

Sierra Vázquez, M., González Astudillo, M.T. y López Esteban, C. (1998). Funciones: traducción entre representaciones. *Aula: Revista de Pedagogía de la Universidad de Salamanca, 10*, 89-104.

K. Anexos

1. Anexo A. Ficha rutina "veo, pienso, me pregunto" a entregar a los alumnos

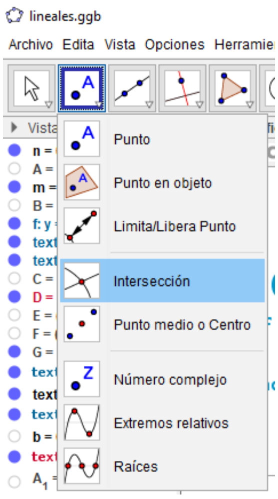
 VEO	 PIENSO	 ME PREGUNTO

2. Anexo B. Programas de GeoGebra empleados

En el ***Ejercicio 20***, *"lineales.ggb"*, se ha diseñado la función de la forma $f(x) = mx + n$, donde m representa la pendiente y n la ordenada en el origen. Para dicha función se han definido dos deslizadores asociados a los valores de m y n, de modo que se ha seleccionado -5 como valor mínimo para estos valores y 5 como valor máximo, con un incremento de 0,5 (esto hace que los valores m y n aumenten o disminuyan en 0,5 unidades), aunque cabe destacar que estos valores con los que se han definido los deslizadores pueden modificarse.

En dicho programa también se han coloreado los puntos en que $x = 2$ y $x = -3$, para que al variar los valores de m y n con los deslizadores, se observe como estos puntos varían y se halle su imagen.

Por otro lado, para hallar los puntos de corte con este programa sin hacerlo a simple vista, mediante la herramienta "*Intersección*" seleccionando la recta y después cada uno de los ejes se obtienen los puntos de corte de la función con cada eje. Esta herramienta se encuentra en el Menú → Punto → Intersección, como se muestra en la siguiente imagen.



La finalidad de esta actividad es estudiar las funciones lineales y que los alumnos vean como una función varía según los valores de la pendiente y de la ordenada en el origen.

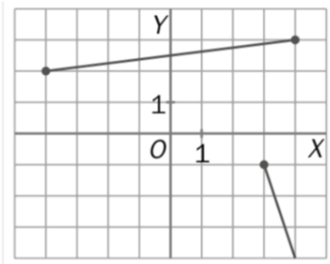
En el ***Ejercicio 21*** en el archivo "*cuadráticas.ggb*" de GeoGebra, en este caso la función principal que se ha definido es de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde los valores de a, b y c se han asociado a deslizadores con valores mínimos de -10 y máximos de 10 con un incremento de 0,5.

Por tanto, la finalidad de esta actividad es que los alumnos varíen los valores de a, b y c mediante los deslizadores de distintos modos y observen que implica que estos sean positivos, negativos o cero.

3. Anexo C. Actividades del examen resueltas

1. Observa los siguientes apartados y trata de identificar si se corresponden con una función. Para los apartados que representen una función trata de obtener su expresión algebraica. ***(1,5 puntos)***

a.



(0,5pt)

La variable dependiente se corresponde con la y, y la variable independiente con la x. Observando la gráfica, puede verse que en el intervalo $[3, 4]$ para cada valor de x se tienen dos valores de y, por lo tanto, dicha gráfica no representa una función ya que a la variable x no le corresponde un único valor de y.

b. El precio total de comprar naranjas si el precio de cada kilo es de 2,45€. *(0,5pt)*

Se identifica la variable independiente x = "cantidad de naranjas a comprar" en kilogramos, y a la variable dependiente y = "precio total de las naranjas que se compran" en euros. Según la cantidad de kilos que se compren, se tendrá un único precio, luego, la relación es una función.

<u>Método 1:</u> (directamente)

Por tanto, como cada kilo de naranjas cuesta 2,45€, si se compran x kilos de naranjas, el precio de estas será $y = 2{,}45x$.

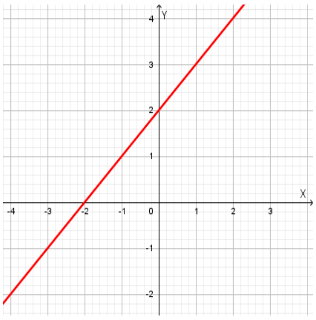
<u>Método 2:</u>

Identificando las variables como en el caso anterior, se puede buscar la relación algebraica mediante una tabla de valores:

$\boldsymbol{x}$	0	1	2	3
$\boldsymbol{y}$	0	2,45	4,90	7,35

Por tanto, puede extraerse la relación $y = 2{,}45x$ de la tabla.

c.



(0,5pt)

La variable dependiente es y, y la variable independiente x. Observando la gráfica se puede ver como para cada valor de x se tiene un único valor de y, por tanto, la gráfica representa una función. Ahora, para obtener su expresión algebraica:

<u>Método 1:</u>

Observando la gráfica se tiene que la función corta el eje Y en $y = 2$, por lo que la ordenada en el origen será 2. Asimismo, si se observa la función a simple vista podría verse que la pendiente es 1 ya que es una función sencilla, por tanto, la función que representa la gráfica es: $y = x + 2$.

<u>Método 2:</u>

Observado la gráfica y extrayendo pares de valores de la forma (x, y) se puede formar una tabla de valores como la siguiente.

x	-2	-1	0	1
y	0	1	2	3

De donde puede extraerse la relación $y = x + 2$.

2. **Observa la siguiente tabla de valores donde se representa la altitud, en metros, y el tiempo, en horas.** ***(1,5 puntos)***

$tiempo\ (h)$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
$altitud\ (m)$	**690**	**880**	**975**	**1125**	**1125**	**940**	**1035**	**890**	**700**

a. Realiza un enunciado que se ajuste a los datos de la tabla de valores anterior.

(0,75pt)

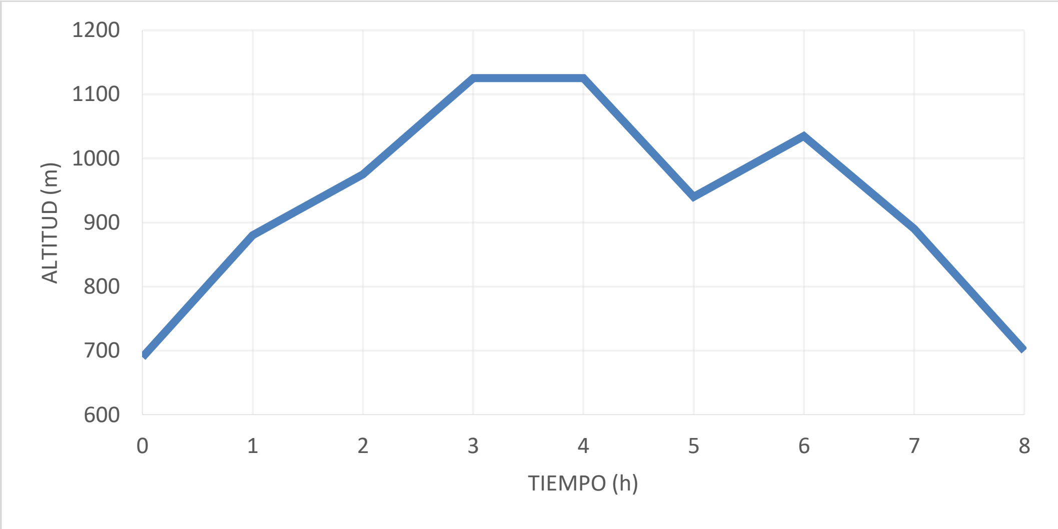
Consideramos la variable dependiente como la altitud en metros, y la independiente como el tiempo en horas. Luego, un posible enunciado para este problema es el siguiente.

“Diego realizó una excursión el pasado sábado al monte, partió de una altitud de $690m$ y caminó durante $1h$ a velocidad constante hasta alcanzar los $880m$ de altitud. Durante la siguiente hora avanzó a velocidad constante hasta los $975m,$ y siguió hasta el pico situado a $1125m,$ el cual alcanzó a las 3 horas de su partida. Hizo un descanso en el pico durante $1h$ y aprovechó para almorzar, después continuó su excursión. Por tanto, a las $4h$ de su partida comenzó a descender hasta los $940m$ durante la siguiente hora, allí se encontró con una pequeña montaña y tuvo que realizar una pequeña subida de $1h$ hasta los $1035m$. Finalmente, Diego procedió a descender la montaña a las $6h$ de su partida, durante $1h$ bajo hasta los $890m$ a una velocidad constante, y durante la siguiente y última hora bajo hasta los $700m$ de altitud, donde dio por concluida la excursión ya que se encontró con su grupo de amigos. Realiza una tabla de valores con los datos que puedas extraer de la excursión de Diego.”

Cabe destacar que el enunciado de este problema es de respuesta abierta, por lo que cualquier enunciado que se refiera a la altura de un globo aerostático, avión, senderismo, etc. puede servir. Además, notar también que la invención del enunciado podría realizarse una vez hecho el apartado b.

b. Dibuja el eje de coordenadas con sus correspondientes variables en los ejes y representa la gráfica que refleje la situación anterior. Determina los intervalos en los que la función es creciente, constante y decreciente. ¿Qué significa en el enunciado que has propuesto que la función sea creciente, constante o decreciente? *(0,75pt)*

Siendo x la altitud en metros e y el tiempo en horas, se dibuja un sistema de coordenadas y se asocian estas variables a los ejes correspondientes. Así, la representación gráfica es la siguiente:

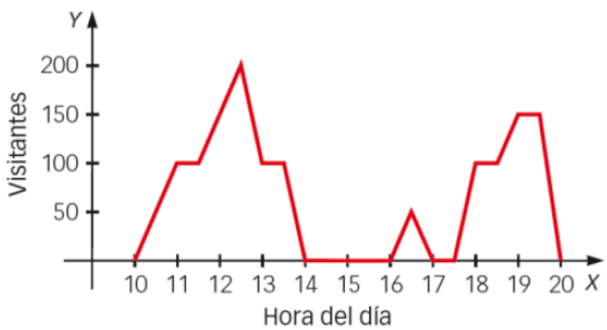


Para estudiar cómo cambia la función se sigue la siguiente técnica.

Dado un intervalo (a, b) donde $a < b$ siendo a y b números muy próximos entre sí, si $f(b) > f(a)$ es una función creciente en ese intervalo. En caso de que $f(b) < f(a)$ la función será decreciente en dicho intervalo. Y en caso de que $f(b) = f(a)$ la función es constante. Es decir, es lo mismo que observar que una función crece si al aumentar x aumenta y, se mantiene constante si al aumentar x la variable y se mantiene igual, y decrece si al aumentar x la variable y disminuye. Por tanto:

- La función es creciente en $(0,3)\ U\ (5,6)$ y en su enunciado significa que Diego está subiendo la montaña, por ello aumenta su altitud.
- La función es constante en $(3,4)$ y en su enunciado significa que durante $1h$ Diego se mantiene a una altura de $1125m$ en el pico de la montaña.
- La función es decreciente en $(4,5)\ U\ (6,8)$, lo cual significa que el excursionista está descendiendo la montaña, por ello la altitud a la que se encuentra disminuye.

3. **La siguiente gráfica muestra el número de visitantes recogido en un día concreto de fin de semana en el Palacio de la Aljafería de Zaragoza.**



Observa detenidamente la gráfica y responde a las siguientes preguntas.

(2,5 puntos)

a. ¿Durante qué intervalo de tiempo está abierto el Palacio? ¿Con qué característica de una función se corresponde ese intervalo? *<u>Nota</u>: entre las 14h y 16h y las 17h-17:30h el palacio permanece abierto aunque no reciba visitantes.* *(0,5pt)*

El intervalo de tiempo durante el que permanece abierta la Aljafería es $[10, 20]$. Además, dicho intervalo se corresponde con el dominio de la función.

b. Escribe el intervalo correspondiente al número de visitantes que se han recibido en el día, ¿con qué característica de una función se corresponde? *(0,25pt)*

El número de visitantes que se ha recibido varía en el intervalo $[0, 200]$, y se corresponde con el recorrido o imagen de la función.

c. ¿Cuál es el máximo número de visitantes que se encuentran en la Aljafería y a qué hora se produce? Además, ¿con qué se corresponde está característica de la función? *(0,5pt)*

El máximo se tiene en $(12.5, 200)$, luego el máximo número de visitantes que se encuentra en un determinado momento en la Aljafería son 200 visitantes, y la hora en que produce es a las doce y media de la mañana. Esta característica se corresponde con el máximo absoluto de la función.

d. ¿En qué intervalo de tiempo hay 0 visitantes en el Palacio? *(0,25pt)*

Se tienen 0 visitantes en $(14, 16)\ U\ (17, 17.5)$.

e. ¿Cuántos visitantes hay a las $13h$? ¿Y a las $19h$? *(0,5pt)*

Observando la gráfica para los valores de $x = 13$ y $x = 19$, se tiene que a las $13h$ hay 100 visitantes, y a las $19h$ hay 150 visitantes.

f. Escribe los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. ¿Qué significa que esos intervalos sean crecientes o decrecientes? *(0,5pt)*

Los intervalos de crecimiento de la función son $(10, 11)\ U\ (11.5, 12.5)\ U\ (16, 16.5)\ U\ (17.5, 18)\ U\ (18.5, 19)$, y esto significa que durante esos intervalos de tiempo, el número de personas que entra a la Aljafería es mayor que el número que sale. Es decir, conforme aumenta el tiempo, en esos intervalos se tienen más visitantes.

Los intervalos de decrecimiento de la función son $(12.5, 13)\ U\ (13.5, 14)\ U\ (16.5, 17)\ U\ (19.5, 20)$, lo cual significa que en dichos intervalos de tiempo el número de visitantes que sale de la Aljafería es mayor que el número de visitantes que entra. Es decir, conforme aumenta el tiempo en dichos intervalos se tiene menor número de visitantes.

4. **David tiene que desplazarse de Zaragoza a otra localidad, pero su vehículo está estropeado. Ha estado comparando el alquiler de distintos medios de transporte a lo largo de un día y los datos que ha recabado son los siguientes:**

- **Si viaja en moto, ha de pagar por el trámite 190€ más el alquiler de la moto equivalente a 30€ a la hora.**
- **Si viaja en coche, ha de pagar por el trámite 135€ más el alquiler equivalente a 45€/h desde que lo contrate.**
- **Si viaja en furgoneta, ha de pagar 55€ por el trámite más un coste fijo de 385€ durante ese día.**

Analiza todos los datos que David ha recogido y responde a las siguientes preguntas. ***(2,5 puntos)***

a. Define las variables que intervienen y obtén la expresión algebraica para cada uno de los medios de transporte que David ha analizado. *(0,75pt)*

Las variables que intervienen son $x =$ "tiempo que se alquila el medio de transporte" en horas, e $y =$ "precio a pagar por el alquiler del medio de transporte" en euros.

La expresión algebraica asociada a cada medio de transporte es la siguiente:

- Para la moto pagaría 190€ por el trámite y por cada hora 30€, por lo tanto, en total pagaría $y = 190 + 30x$.
- Para el coche pagaría 135€ por el trámite y por cada hora 45€, por lo tanto, en total pagaría $y = 135 + 45x$.
- Para la furgoneta tendría que pagar 55€ por el trámite y un coste de 385€ durante todo el día. Por tanto, tendría que pagar en total $y = 55 + 385 = 440$ €.

Cabe destacar que otro método para obtener las expresiones algebraicas es realizar primero el apartado b, para obtener la tabla de valores y/o la gráfica y a partir de ahí construir la expresión algebraica.

b. Realiza una tabla de valores y dibuja en la misma gráfica las funciones que representan a cada uno de los vehículos. *(0,75pt)*

- Una tabla de valores asociada al alquiler de la moto es:

x	0	2	3	6
y	190	250	280	370

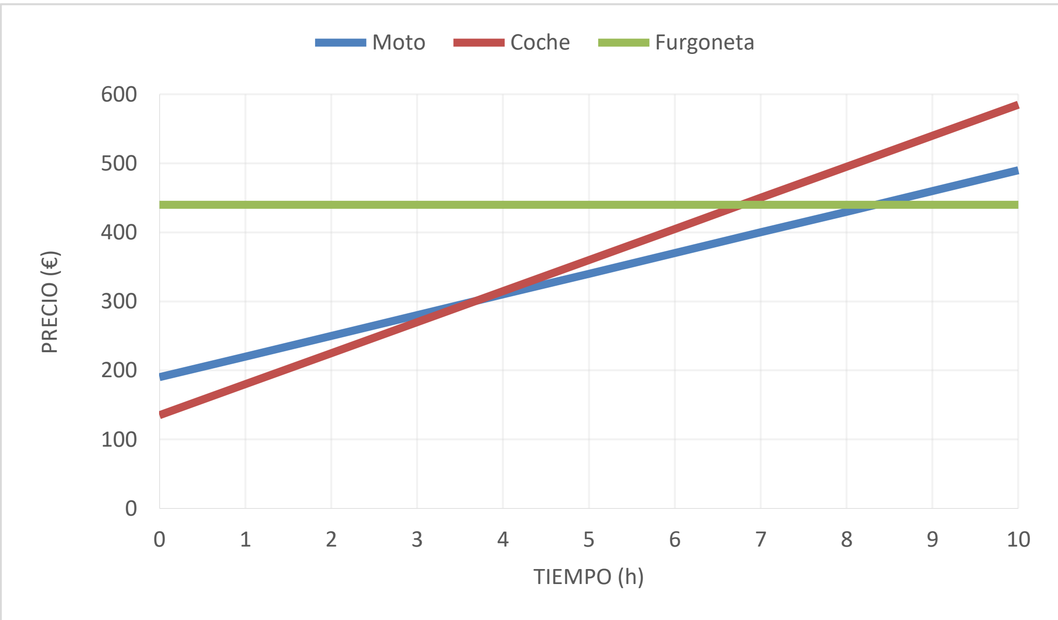
- Una tabla de valores asociada al alquiler del coche es:

x	0	2	4	6
y	135	225	315	405

- Una tabla de valores asociada al alquiler de la furgoneta es:

x	0	3	6	9
y	440	440	440	440

Para representar gráficamente las funciones, se dibuja un sistema de coordenadas y se denota al eje X como tiempo (en horas), y el eje Y como precio (en €).



c. ¿Qué transporte es más económico si David lo alquila durante 9 horas? ¿Cuánto cuesta a las $9h$? *(0,5pt)*

<u>Método 1:</u>

Observando la gráfica en $x = 9$, se observa que el medio de transporte más económico es la furgoneta, y el precio de alquiler por $9h$ es de 440€.

<u>Método 2:</u>

Observando la tabla de valores con valores de $x = 9$, se puede hacer la comparación entre los medios de transporte. Del mismo modo, otra opción es evaluar $x = 9$ en cada una de las funciones y observar cual tiene menor valor en la imagen de $x = 9$:

- Para la moto: $y = 190 + 30 \cdot 9 = 460$ €.
- Para el coche: $y = 135 + 45 \cdot 9 = 540$ €.
- Para la furgoneta: $y = 440$ €.

Por tanto, haciendo la comparación se tiene que el menor valor de y se tiene en la función asociada a la furgoneta, luego, la furgoneta sale más rentable a las $9h$ de alquiler y su precio es de 440€.

d. Si solamente quiere alquilar el transporte durante 3 horas, ¿cuál le resulta más económico y cuál es su precio? ¿Y en caso de alquilarlo durante 6 horas? *(0,5pt)*

<u>Método 1:</u>

Observando la gráfica en $x = 3$, se observa que el medio de transporte más económico es el coche, y el precio de alquiler por $3h$ es de 270€.

Por otro lado, observando la gráfica en $x = 6$, se observa que el medio de transporte más económico es la moto, y el precio de alquiler por $6h$ es de 370€.

<u>Método 2:</u>

Observando la tabla de valores con valores de $x = 3$, y luego con $x = 6$ se puede hacer la comparación entre los medios de transporte. Del mismo modo, otra opción es evaluar $x = 3$ y $x = 6$ en cada una de las funciones y observar cual tiene menor valor.

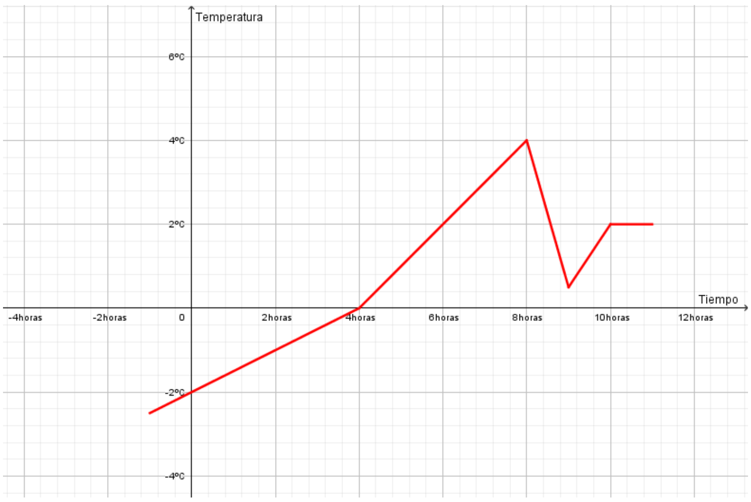
- Para $3h$ en la moto: $y = 190 + 30 \cdot 3 = 280$ €.
- Para $3h$ en el coche: $y = 135 + 45 \cdot 3 = 270$ €.
- Para $3h$ en la furgoneta: $y = 440$ €.

Por tanto, haciendo la comparación se tiene que el menor valor de y se tiene en la función asociada al coche, luego, el coche sale más rentable a las $3h$ de alquiler y su precio es de 270€.

- Para $6h$ en la moto: $y = 190 + 30 \cdot 6 = \ 370$ €.
- Para $6h$ en el coche: $y = 135 + 45 \cdot 6 = \ 405$ €.
- Para $6h$ en la furgoneta: $y = 440$ €.

Por tanto, haciendo la comparación se tiene que el menor valor de y a las $6h$ es para la función asociada a la moto, luego, la moto sale más económica a las $6h$ de alquiler y su precio es de 370€.

5. **Responde a los siguientes apartados:** ***(2 puntos)***
   a. Observa la gráfica y propón un enunciado que se ajuste a dicha situación.
   <u>Nota:</u> los números negativos correspondientes al tiempo equivalen a las horas anteriores a las que se comienza a tomar la referencia desde 0. Es decir, se puede corresponder con las horas antes de las 0h de la madrugada, por ejemplo, $-1 = 11\ h$ *de la noche.*



   Después, analiza los puntos de corte de la función anterior con el Eje X y Eje Y, e indica qué sucede en casa caso. *(1,25pt)*

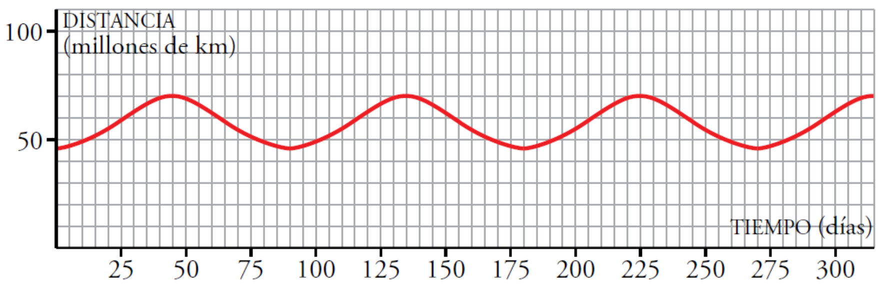
La variable dependiente es $y =$ "temperatura" en $ºC$, y la variable independiente es $x =$ "tiempo" en horas. Por tanto, un posible enunciado que describa esa gráfica podría ser el siguiente, aunque cabe destacar que es una respuesta abierta por lo que distintos enunciados ajustados a los datos de la gráfica pueden ser válidos.

“La temperatura la pasada noche en Zaragoza fue de $-2{,}5ºC$ a las $11h$ de la noche, posteriormente, aumentó constantemente hasta los $0ºC$ que se dieron a las $4h$ de la madrugada. La temperatura siguió aumentado constantemente hasta alcanzar los $4ºC$ a las $8h$ de la mañana, pero comenzó a aparecer niebla y la temperatura descendió constantemente hasta los $0{,}5ºC$ a las $9h$. Durante la siguiente hora, la temperatura aumentó ligeramente hasta alcanzar los $2ºC$, donde se mantuvo constante desde las $10h$ de la mañana hasta las $11h$ que se finalizó de tomar referencias. Dibuja una gráfica que se ajuste a este anunciado.”

A continuación, observando la gráfica se extraen los siguientes puntos de corte:

- Eje X: la función corta a este eje en $(4, 0)$, lo cual significa que, en el contexto del enunciado propuesto anteriormente, a las $4h$ de la madrugada se tienen $0ºC$ en la cuidad.
- Eje Y: la función corta al eje en $(0, -2)$, lo cual significa que a las $0h$ de la madrugada en la cuidad se ha registrado una temperatura de $-2ºC$.

b. La distancia al Sol del planeta Mercurio oscila entre 46 y 70 millones de kilómetros como se muestra en la gráfica. Observando la imagen averigua cuántos días tarda Mercurio en completar su órbita alrededor del Sol. Además, ¿con qué característica de las funciones se correspondería ese tiempo? *(0,75pt)*



Observando la gráfica se identifica a la variable independiente como tiempo en días, y a la variable dependiente como distancia en millones de kilómetros.

Método 1:

Analizando las oscilaciones, si se comienza a observar el eje Y desde $x = 0$, la gráfica toma valores desde $y = 46$. Por tanto, situados en el valor $y = 46$, se tiene que la función oscila y vuelve a tomar ese valor en $x = 88$ donde comienza a repetirse el comportamiento de la gráfica. Por tanto, la función es periódica y su período es 88 días.

Método 2:

Otra forma de identificar cada cuántos días se repite la función, pero análoga a la anterior, es observar cuando la función toma valores máximos de y, es decir, toma el primer valor máximo en $y = 70$ con $x = 45$. Por tanto, conforme aumentan las x, la función oscila y se vuelve a tomar el mismo valor en $x = 133$, aproximadamente, y se repite el comportamiento de la gráfica. Por tanto, la función es periódica y su período es de 88 días.

Cabe destacar que en la gráfica puede ser complicado obtener los valores exactos, por ello una aproximación a un período de 90 días también sería correcto.

4. Anexo D. Clasificación de tareas para cada actividad de la prueba

Actividad 1.

- **Tareas principales**
  - Identificar el concepto de función observando las distintas formas de representación.
  - Obtener la expresión algebraica observando el enunciado y la gráfica (en los casos b y c).
- **Tareas auxiliares específicas**
  - Identificar la variable dependiente y la independiente.
  - Rellenar una tabla de valores para obtener la expresión algebraica de b.
  - Extraer las coordenadas a partir de la gráfica en c, rellenar una tabla de valores y dar su expresión algebraica.
- **Tareas auxiliares generales**
  - Uso de notación.
  - Cálculo numérico al realizar la tabla de valores o expresión algebraica.
  - Razonar las respuestas.

Actividad 2.

- **Tareas principales**
  - Realizar un enunciado que se ajuste a los datos expresados en la tabla de valores.
  - Realizar una representación gráfica que se corresponda con los datos expresados en la tabla de valores.
  - Extraer los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.
- **Tareas auxiliares específicas**
  - Interpretar las variables que intervienen en la función que se describe.
  - Graduar los ejes de coordenadas.
  - Representar puntos en los ejes coordenados.
  - Representar correctamente los intervalos que se piden.
  - Interpretar la gráfica de izquierda a derecha.
- **Tareas auxiliares generales**
  - Uso de notación.
  - Realizar cálculos numéricos.
  - Uso de las magnitudes y unidades que se expresan en la tabla de valores.

- Razonar las respuestas.

Actividad 3.

- **Tareas principales**
  - Hallar los valores de la variable independiente para los que la función está definida (dominio), y relacionarlo con los horarios de apertura de la Aljafería aunque en algunos momentos no haya visitantes.
  - Hallar los valores de la variable dependiente para los que la función está definida, es decir, hallar el recorrido de la función y asociarlo al número de visitantes.
  - Identificar el máximo de la función para así tener el número de personas que se encuentran en un determinado momento en la Aljafería.
  - Obtener el intervalo de tiempo en el que se tiene 0 visitantes.
  - Hallar la imagen de un punto en la gráfica, es decir, identificar el número de personas que hay en la Aljafería a las $13h$ y a las $19h$.
  - Describir los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.
- **Tareas auxiliares específicas**
  - Identificar la variable dependiente e independiente al observar el enunciado y la gráfica.
  - Interpretar la gráfica correctamente desde valores negativos de las variables, hasta valores positivos. Es decir, interpretarla de izquierda a derecha.
  - Identificar la graduación en los ejes de coordenadas.
  - Traducir la hora en que se tiene el máximo de visitantes.
  - Escribir correctamente los intervalos de la función que se piden.
  - Obtener los valores correctos correspondientes a puntos coordenados.
- **Tareas auxiliares generales**
  - Uso de notación.
  - Razonar las respuestas.

Actividad 4.

- **Tareas principales**
  - Identificar y definir las variables que intervienen.
  - Hallar la expresión algebraica para cada función.

- Realizar una tabla de valores para las funciones que se dan en la actividad a partir de los enunciados o de las expresiones algebraicas obtenidas.
- Realizar la representación gráfica de las funciones que intervienen.
- Identificar el valor de las funciones para los valores que se piden.

- **Tareas auxiliares específicas**
  - Dibujar y graduar correctamente los ejes de coordenadas.
  - Representar puntos en los ejes coordenados.
  - Identificar en qué momentos una de las funciones tiene mayor pendiente que el resto, o identificar el comportamiento de la gráfica de izquierda a derecha.
- **Tareas auxiliares generales**
  - Uso de notación.
  - Realizar cálculos numéricos.
  - Razonar las respuestas.
  - Identificar en qué unidades se miden la variable dependiente e independiente.

<u>Actividad 5.</u>

- **Tareas principales**
  - Inventar un enunciado que se ajuste a la gráfica que se muestra.
  - Obtener los puntos de corte con los ejes mediante la gráfica.
  - Identificar el período de la función y relacionarlo con los días que tarda Mercurio en completar su órbita alrededor del sol.
- **Tareas auxiliares específicas**
  - Interpretar la evolución de la gráfica desde valores negativos de las variables hasta valores positivos, es decir, de izquierda a derecha.
  - Identificar la graduación de los ejes coordenados.
- **Tareas auxiliares generales**
  - Usar las unidades de medida adecuadas.
  - Uso de notación.
  - Realizar cálculos numéricos y algebraicos.
  - Razonar las respuestas.